Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Melicherčík

Martingalové míry a oceňování finančních derivátů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Na tomto mieste by som rád poďakoval Mgr. Petrovi Dostálovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné pripomienky a konzultácie pri spracovaní mojej bakalárskej práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Martingalové míry a oceňování finančních derivátů

Autor: Martin Melicherčík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci je spísaná teoria vedúca k stanovovaniu spravodlivých cien finančných derivátov. Spravodlivé oceňovanie je založené na princípe rovnováhy, čo znamená, že žiadna strana nemá vopred väčšiu šancu na úspech ako iná. Práve kvôli tejto vlastnosti sú v práci ako hlavný nástroj oceňovania použité martingalové miery, ktoré rešpektujú tento stav vyváženosti. Náhodné procesy si z pohľadu svojich martingalových mier zachovávajú v čase konštantnú očakávanú hodnotu, a teda nemôžme nikdy vopred očakávať ich vychýlenie na jednu alebo druhú stranu. Okrem základov teórie martingalov tvorí dôležitú časť aj Douglasova veta, ktorá nám odpovedá na otázku za akých podmienok, by sme teoreticky mohli oceniť dokonca aj ľubovolný finančný derivát. V posledných častiach je aj na konkrétnych príkladoch ukázané, ako by sa dala spravodlivá cena určiť.

Klíčová slova: martingal, oceňovanie pomocou martingalov, Douglasova veta, predikovateľný proces

Title: Martingale measures and pricing of financial derivatives

Author: Martin Melicherčík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The theory written in this work explains basic tools for setting justified price of financial derivatives. Jusified pricing is based on principal of balance, which means, that in advance no side has bigger chance to profit than other. Because of this characteristic, the main pricing tool in the work are martingale measures, which respect the state of balance. From the point of view of martingale measures random processes keep their constant expected value, so we can never expect them to deflect to one side or another. The important part of the work, besides basics of martingales, is Douglas theorem, which answers the question of our ability to theoretically set the justified price of any financial derivative. In the last parts, there are also some manuals and examples how to determine the justified price.

Keywords: martingale, martingale pricing, Douglas theorem, predictable process

Obsah

Úvod

Cieľom tejto práce je oboznámiť čitateľa s úvodom do teórie martingalov a martingalových mier a pomocou nich načrtnúť proces spravodlivého oceňovania finančných derivátov. Teoretickým základom je Douglasova veta. Hoci sa jej znenie môže zdať na prvý pohľad abstraktné a nesúvisiace s teóriou oceňovania, v ďalších častiach práce sa stane užitočným nástrojom, ktorý šetrí prácu a dá nám potrebné poznatky na to, či spravodlivú cenu vieme stanoviť alebo nie.

Vedomosti potrebné na dokázanie tejto vety spolu so samotným dôkazom tvoria prvú kapitolu práce. V druhej kapitole sú rozobraté základné pojmy a vlastnosti martingalov potrebné na získanie intuície a predstavy, čo to martingaly sú a prečo by sa pomocou martingalových mier procesu mohla stanoviť spravodlivá cena. Martingaly sa v praxi využívajú práve vďaka ich vlastnosti zachovávať si očakávané hodnoty v čase. Prvé dve kapitoly sú vlastne teoretickou prípravou pred aplikáciami v poslednej časti.

V tretej kapitole sa spájajú poznatky z kapitoly prvej a druhej v podobe finančnej interpretácie v prípade jedného finančného derivátu a aj viacerých. V neposlednom rade treba spomenúť aj prílohu B, ktorá prináša zaujímavý pohľad a rozšírenie niektorých pojmov známych iba v priestoroch so skalárnym súčinom a ich aplikáciu pri dokazovaní dôležitej vety o replikácii pre viacero finančných derivátov alebo iných investičných možností.

1. Douglasova veta

Pred samotnou Douglasovou vetou musíme najskor spomenúť pár tvrdení, ktoré nám potom pomôžu pri dokazovaní. Prvá lema je dôsledkom Hahn-Banachovej vety, ktorú nájdeme v [2].

Lema 1. *Nech V je uzavretý podpriestor normovaného lineárneho priestoru U a x je bod v $U \setminus V$. Potom existuje spojitý lineárny funkcionál, ktorý je rovný 0 na V a v bode x je nenulový.*

Dôkaz. Položme
$$d = \inf_{v \in V} \|x - v\|,$$
čo je vzdialenosť bodu x od V. Vďaka uzavretosti V máme $d > 0$. Ďalej označme
$$M = lin\{V \cap \{x\}\} = \{\lambda x + v; \lambda \in \mathbb{R}, v \in V\}.$$
Množina M je tiež lineárny podpriestor prietoru U. Na M definujeme funkcionál $F : M \to \mathbb{R}$ takto:
$$F(\lambda x + v) = \lambda.$$
Zrejme F je lineárny. Na overenie spojitosti funkcionálu F stačí ukázať konečnosť jeho normy
$$\|F\| = \sup\{|F(y)|; y \in M, \|y\| \leq 1\}.$$
Kedže pre $y \in M$, $\|y\| \leq 1$ platí
$$|F(y)| \leq \frac{|F(y)|}{\|y\|} = \left| F\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right|, \quad \|(y/\|y\|)\| = 1,$$
stačí nám uvažovať len vektory s jednotkovou normou. Dostávame
$$\begin{aligned}\|F\| =& \sup\{|F(y)|; y \in M, \|y\| = 1\} = \sup\left\{|F\left(\frac{y}{\|y\|}\right)|; y \in M, y \neq 0\right\} \\ =& \sup\left\{\frac{|F(y)|}{\|y\|}; y \in M, y \neq 0\right\}.\end{aligned}$$
Ďalej z množiny $M \setminus \{0\}$, cez ktorú robíme supremum môžme vynechať všetky $v \in V \setminus \{0\}$ (keď $\lambda = 0$), pretože hodnota výrazu $|F(y)|/\|y\|$ je pre tieto hodnoty nulová a vieme, že pre niektoré $y \in M \setminus \{0\}$ je kladná. Obmedzíme sa teda pri hľadaní suprema na množinu $\{\lambda x + v \in M \setminus \{0\}; v \in V, \lambda \neq 0\}$. Potom dostávame
$$\begin{aligned}\|F\| =& \sup\left\{\frac{|\lambda|}{\|\lambda x + v\|}; v \in V, \lambda \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{|\lambda|}{|\lambda|\|x + \frac{v}{\lambda}\|}; v \in V, \lambda \neq 0\right\} \\ =& \sup\left\{\frac{1}{\|x + \frac{v}{\lambda}\|}; v \in V, \lambda \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{1}{\|x - \left(-\frac{v}{\lambda}\right)\|}; v \in V, \lambda \neq 0\right\}.\end{aligned}$$
Nakoniec z toho, že
$$V = \left\{-\frac{v}{\lambda}; v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\},$$

dostávame

$$\|F\| = \sup\left\{\frac{1}{\|x-v\|}; v \in V,\right\} = \frac{1}{\inf\{\|x-v\|; v \in V,\}} = \frac{1}{d} < \infty.$$

Zrejme F je na V nulový a $F(x) = 1$. Z Hahn-Banachovej vety pre normované lineárne priestory existuje lineárny spojitý funkcionál $f : U \to \mathbb{R}$ taký, že $f = F$ na M a $\|f\| = \|F\|$. Teda f je funkcionál, ktorý sme hľadali.

$\square$

V práci sa po zavedení pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bude odkazovať na priestor funkcii $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ skratkami $\mathbb{L}^1(\mathcal{A})$ alebo $\mathbb{L}^1(P)$, podľa toho, ktorý objekt bude v danej situácii dôležitý. Po zavedení ďalších objektov ako σ-algebry $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ resp. pravdepodobnostnej miery R budeme odkazovať skrátenými označeniami $\mathbb{L}^1(\mathcal{F})$ resp. $\mathbb{L}^1(R)$ na priestory s nezmenenými ostatnými symbolmi v označení, t.j. na $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ resp. $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, R)$. Ak z textu plynie, že sa nemení ani jeden zo symbolov pre σ-alegebru alebo mieru, priesor je označený $\mathbb{L}^1$. Skratka si nad šípkami, rovnosťami a nerovnosťami bude znamenať skoro isto. Teraz nasleduje druhé pomocné tvrdenie k Douglasovej vete.

Lema 2. *Nech* $F : \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$ *je spojitý lineárny funkcionál a* P *je pravdepodobnostná miera. Potom existuje* P*-s.i. ohraničená funkcia* h*, taká že*

$$\forall f \in \mathbb{L}^1(P) \quad F(f) = \int hf dP.$$

Dôkaz. Pre $A \in \mathcal{A}$ definujeme $Q(A) := F(1_A)$. Dokážeme, že Q je znamienková miera. Konečnosť Q plynie z jej definície a $Q(\emptyset) = F(0) = 0$, pretože F je lineárny. Majme $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ systém po dvoch disjunktných množín z $\mathcal{A}$ a označme

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Zrejme $1_{B_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1_B$ v $\mathbb{L}^1(P)$, pretože

$$\mathbf{E}[|1_{B_n} - 1_B|] = \mathbf{E}\, 1_{\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k} = P(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zo spojitosti F potom máme

$$Q(B) = F(1_B) = \lim_{n\to\infty} F(1_{B_n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(1_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} Q(A_k).$$

Ďalej dokážeme, že Q je absolútne spojitá vzhľadom k P. Majme $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = 0$. Potom $1_A = 0$ $[P]$-s.i., a teda $Q(A) = F(1_A) = F(0) = 0$. Z Radon-Nikodýmovej vety existuje $[P]$-s.i. jednoznačne určená funkcia h s vlastnosťou

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad F(1_A) = Q(A) = \int_A h\, dP = \int_\Omega h 1_A\, dP.$$

Dokážeme sporom, že h je ohraničená $[P]$-s.i.. Nech h nie je ohraničená $[P]$-s.i.. Položme $B_n := [h > n], n \in N$, potom pre všetky $n \in N$ je $P(B_n) > 0$ a funkcie $f_n := \frac{1_{B_n}}{P(B_n)} \in \mathbb{L}^1(P)$ majú normu 1. Pre ich obrazy platí

$$F(f_n) = \frac{F(1_{B_n})}{P(B_n)} = \frac{1}{P(B_n)} \int_{B_n} h\, dP \geq \frac{1}{P(B_n)} \int_{B_n} n\, dP = n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

čo je spor so spojitosťou (ekvivalentne ohraničenosťou) F. Označme

$$C := \{f \in L^1(P) : F(f) - \int hf dP = 0\}.$$

Funkcionál $f \mapsto \int hf\, dP$ je zrejme spojitý. Množina C je teda jadro spojitého lineárneho funkcionálu a preto je uzavretá v $\mathbb{L}^1(P)$ a taktiež je uzavretá aj na lineárne kombinácie svojich prvkov. Vieme, že C obsahuje všetky merateľné indikátory. Z lineárnej uzatvorenosti obsahuje aj merateľné jednoduché funkcie. Ku každej nezápornej funkcii f z $\mathbb{L}^1(P)$ existuje neklesajúca postupnosť jednoduchých merateľných funkcii $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takých, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Vždy môžme zobrať napr.

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot 1_{[\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}]}.$$

Z uzavretosti C v $\mathbb{L}^1(P)$ je $f \in C$. Kedže každá $f \in \mathbb{L}^1(P)$ sa dá napísať ako $f = f^- + f^-$, tak $C = \mathbb{L}^1(P)$ a tým je lema dokázaná. □

Pred hlavnou vetou spomeňme ešte jednen poznatok:

Poznámka 3. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ buďte $X_n, X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom konvergencia $X_n \overset{\mathbb{L}_1(P)}{\to} X$ implikuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X]$.

Dôkaz. Tvrdenie plynie z trojuholníkovej nerovnosti

$$\lim_{n\to\infty} |\,\mathbf{E}[X_n] - \mathbf{E}[X]| \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|X_n - X| = 0.$$

□

Veta 4 (Douglas)**.** *Nech $(\Omega, \mathcal{A})$ je merateľný priestor, $\mathcal{X}$ množina reálnych náhodných veličin a $\mathcal{X}^*$ vektorový priestor generovaný 1 a $\mathcal{X}$. Buď $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ množina pravdepodobnostných mier P na $(\Omega, \mathcal{A})$ taká, že $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathbf{E}_P[X] = 0$ pre všetky $X \in \mathcal{X}$. Potom $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ je konvexná a P je krajný bod $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ práve vtedy, keď $\mathcal{X}^*$ je hustá v $\mathbb{L}^1(P)$.*

Dôkaz. Nech $Q, R \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$ a $\lambda \in (0,1)$. Zrejme $P := \lambda Q + (1-\lambda)R$ je pravdepodobnostná miera a pre všetky $X \in \mathcal{X}$ platí

$$\int XdP = \lambda \int XdQ + (1-\lambda) \int XdR = 0,$$

teda $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ je konvexná.

Nech $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Predpokladajme, že $\mathcal{X}^*$ je hustá v $L^1(P)$ a že

$$P = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2,$$

kde $Q_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, $i = 1, 2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Chceme dokázať, že z toho plynie $Q_1 = Q_2$, čo znamená, že P je krajný bod. Platí $Q_i \ll P$. Označme $h_i := \frac{dQ_i}{dP}$, i=1,2 Radon-Nikodýmove derivácie Q_i podľa P. Potom pre všetky $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\int\limits_A 1dP = P(A) \geq \lambda_i Q_i(A) = \int\limits_A \lambda_i h_i dP.$$

Z toho plynie, že $h_i \in [0, \frac{1}{\lambda_i}]$ $[P]$-s.v., i=1,2. Keby $h_i > \frac{1}{\lambda_i}$ na množine $D \in \mathcal{A}$, $P(D) > 0$, tak na D je $\lambda_i h_i > 1$ a

$$P(D) = \int\limits_D 1dP < \int\limits_D \lambda_i h_i dP = \lambda_i Q_i(D),$$

čo je spor. Položme

$$c := \max(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2})$$

a zvoľme $A \in \mathcal{A}$ ľubovoľnú. Zrejme $1_A \in \mathbb{L}^1(P)$, a teda existuje postupnosť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ náhodných veličín z $\mathcal{X}^*$ taká, že $X_n \to 1_A$ v $\mathbb{L}^1(P)$. Potom máme

$$\|X_n - 1_A\|_{\mathbb{L}^1(Q_i)} = \int |X_n - 1_A| dQ_i = \int |X_n - 1_A| h_i dP \leq c \int |X_n - 1_A| dP \to 0,$$

a teda X_n konverguje k 1_A aj v $\mathbb{L}^1(Q_i)$, i=1,2. Z poznámky 3 a z predpokladu, že pre všetky $X \in \mathcal{X}^*$ platí $\mathbf{E}_{Q_1}[X] = \mathbf{E}_{Q_2}[X]$, dostávame

$$Q_1(A) = \mathbf{E}_{Q_1}[1_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{Q_1}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{Q_2}[X_n] = \mathbf{E}_{Q_2}[1_A] = Q_2(A).$$

A teda $Q_1 = Q_2$.

Teraz predpokladajme, že $\mathcal{L}^*$ nie je hustá v $\mathbb{L}^1(P)$. Z lemy 1 a 2 pre

$$U = \mathbb{L}^1(P), \quad V = \overline{\mathcal{X}^*}$$

existuje nenulová $[P]$-s.i. ohraničená funkcia h, že $\int hX dP = 0$ platí pre všetky $X \in \mathcal{X}^*$. Môžeme predpokladať, že $\|h\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ (napr. po prenásobení vhodnou kladnou konštantou). Položme pre $A \in \mathcal{A}$

$$Q^+(A) = \int_A (1 + h) dP,$$

$$Q^-(A) = \int_A (1 - h) dP.$$

Keďže $1 \in \mathcal{X}^*$ a $\int h\, dP = 0$, platí

$$Q^\pm(\Omega) = \int 1 \pm h\, dP = 1,$$

a teda miery $Q^{\pm}$ sú pravdepodobnostné. Pre všetky $X \in \mathcal{X}$ ďalej máme

$$\mathbf{E}_{Q^{\pm}}[X] = \int X(1 \pm h)\, dP = \int X dp \pm \int Xh\, dP = 0.$$

Teda $Q^+, Q^- \in \mathcal{M}$ a pre každú $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\left(\frac{Q^+ + Q^-}{2}\right)(A) = \int\limits_A d\left(\frac{Q^+ + Q^-}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_A (1+h) + (1-h) dP = P(A).$$

Zistili sme, že $P = \frac{Q^+ + Q^-}{2}$, $Q^+ \neq Q^-$, a tak P nie je krajný bod $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. $\square$

2. Martingaly

V tejto kapitole spomenieme základné pojmy a vlastnosti martingalov, ich intuitívny význam a využitie vo finančnej sfére.

2.1 Základné definície a vlastnosti

Definícia. Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ merateľný priestor a $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$.

- Systém $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ σ-algebier nazveme **filtrácia**, ak platí
$$\forall s, t \in T \;\; s \leq t \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}.$$
- **Prirodzenou (kanonickou) filtráciou** náhodného procesu $X = (X_t, t \in T) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ rozumieme filtráciu $(\mathcal{F}_t^X, t \in T)$, kde
$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T).$$
- Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrácia, označíme limitné σ-algebry
$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{s \in T} \mathcal{F}_s), \qquad \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{s \in T} \mathcal{F}_s.$$

Definícia. Buď $(X_t, t \in T)$ náhodný proces a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrácia. Hovoríme, že proces X_t je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný ak $X_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t), t \in T$. Píšeme $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$.

Každá σ-algebra $\mathcal{F}_t$ filtrácie $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ reprezentuje informáciu, ktorú budeme mať v čase t v tom zmysle, že o každom jave $A \in \mathcal{F}_t$ budeme jednoznačne vedieť povedať či nastal, alebo nie. Navyše si $\mathcal{F}_t$ môžeme predstaviť ako množniu všekých možných javov, ktoré môžu v čase t nastať. Kanonickú filtráciu procesu $(X_t, t \in T)$ chápeme ako informáciu zohľadňujúcu znalosť hodnôt X_s nadobudnutých v časoch $s \leq t, s \in T$.

Definícia. Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrácia na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Integrovateľný proces $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ nazveme $\mathcal{F}_t$**-martingal**, ak $X_s \stackrel{si}{=} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$, $\mathcal{F}_t$**-submartingal**, ak $X_s \stackrel{si}{\leq} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ a $\mathcal{F}_t$**-supermartingal**, ak $X_s \stackrel{si}{\geq} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ pre všetky $s \leq t, s, t \in T$.

Poznámka 5. Z podmienok v definícii $\mathcal{F}_t$-martingalu po aplikácii operátoru $\mathbf{E}$ vidíme, že martingaly si v každom časovom okamihu $t \in T$ zachovávajú konštantnú strednú hodnotu $\mathbf{E}[X_t]$, submartingaly ju majú neklesajúcu a supermartingaly nerastúcu.

Vlastnosť $\mathcal{F}_t$-martingalu, že pre $s \leq t$ z T je $X_s \stackrel{si}{=} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ interpretujeme tak, že v čase s je hodnota veličiny X_s verným odhadom hodnoty veličiny X_t nadobudnutej v čase t. Podmienku by sme mohli preložiť do slov tak, že očakávaná hodnota veličiny X_t s poznatkami v čase s je X_s, pre ľubovoľné časy $s < t$ z T. Inak povedané v čase s nám X_s dáva vyvážený (podľa pravdepodobnosti P)

odhad budúcich hodnôt procesu X. Proces $(X_t, t \in T)$ sa potom používa na modelovanie spravodlivého ocenenia očakávaných finančných tokov. Slovo spravodlivý tu chápeme v zmysle, že pri akejkoľvek obchodovacej strategii (napr. s finančnými derivátmi) neprináša očakávaná hodnota pri spravodlivom oceňovaní ani zisk ani stratu. Pojmu spravodlivá (cena) v tejto práci neskôr priradíme úplne konkrétny význam. Táto finančná interpretácia odpovedá prípadu, keď existuje veličina $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ taká, že $X_t = \mathbf{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$. Vtedy si môžeme X_t predstaviť ako vyvážený náhodný proces smerujúci do istého cieľa. Ak však tento cieľ neexistuje, môže v limite martingal stratiť svoju úroveň $\mathbf{E}[X_s] = \mathbf{E}[X_t]$, ktorú si v konečných časoch zachováva. To súvisí aj s rovnomernou integrovatelnostou procesu X_t. Týmto prípadom sa ešte budeme zaoberať po vete 10.

Analogicky je pre $\mathcal{F}_t$-submartingal resp. $\mathcal{F}_t$-supermartingal hodnota X_t interpretovaná ako odhad zdola resp. zhora budúcich hodnôt procesu X.

Definícia. Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrácia na $(\Omega, \mathcal{A})$ a $X = (X_t, t \in T)$ náhodný proces. Pravdepodobnostnú mieru P na $\mathcal{F}_\infty$ nazveme **martingalová miera** procesu X, ak X je martingalom na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$.

Lema 6. *Množina $\mathcal{M}$ všetkých martingalových mier procesu $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je konvexná.*

Dôkaz. Tvrdenie sa dá dokázať jednoducho aj priamym výpočtom. Plynie však aj z Douglasovej vety. Položme

$$\mathcal{X} = \{1_A(X_t - X_s); A \in \mathcal{F}_s,\ s, t \in T,\ s < t\}.$$

Stačí nám dokázať, že $\mathcal{M} = \mathcal{P}_\mathcal{X}$. Konvexnosť bude potom plynúť s Douglasovej vety. Nech teda $Q \in \mathcal{M}$. Pre $s, t \in T$, $s < t$ je $\mathbf{E}_Q[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$. Pre $A \in \mathcal{F}_s$ teda máme

$$\mathbf{E}_Q[1_A(X_t - X_s)] = \int_A X_t - X_s \, dQ = 0$$

a $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$.

Naopak nech $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$. Potom $X_t \in \mathbb{L}^1(Q)$, $t \in T$ a pre všetky $s, t \in T$, $s < t$ a $A \in \mathcal{F}_s$ platí

$$\int_A X_t \, dQ = \int_A X_s \, dQ,$$

teda $\mathbf{E}_Q[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, čiže $Q \in \mathcal{M}$.

□

Zavedenie množiny $\mathcal{X}$ v dôkaze lemy 6, je veľmi podobné ako vo finančnej interpretácii v kaptole 3. Tam budeme pracovať už s lokálne konečnou indexovou množinou.

Veta 7. *Nech $\emptyset \neq T \subset \mathbb{R}$ je lokálne konečná a $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, $X_t \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T$. Potom X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub) práve vtedy, keď*

$$\forall s, t \in T, s < t, (s, t) \cap T = \emptyset : X_s \overset{si}{=} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \quad (\overset{si}{\geq} / \overset{si}{\leq}). \tag{2.1}$$

Ak $(s, t) \cap T = \emptyset$ hovoríme, že s,t sú susedné.

Dôkaz. Ak je proces X_t $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub), tak (2.1) platí z definície. Naopak ak platí (2.1), tak platí $V(0)$, kde

$$V(n): \ \forall s,t \in T, s<t, \ \mathrm{card}((s,t)\cap T)=n : X_s \overset{si}{=} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \quad (\overset{si}{\geq} / \overset{si}{\leq}).$$

Nech $n \in \mathbb{N}$. Indukciou ukážeme, že platí $V(n)$ za predpokladu, že platí $V(k)$ pre $k<n$. Nech $\mathrm{card}((s,t)\cap T)=n$. Existuje $r \in (s,t)\cap T$. Potom $n_1 = \mathrm{card}((s,r)\cap T) < n$ a n_2 $=\mathrm{card}((r,t)\cap T) < n$. Z indukčného predpokladu dostávame

$$X_s \overset{si}{=} \mathbf{E}[X_r|\mathcal{F}_s] \overset{si}{=} \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_r]|\mathcal{F}_s] \overset{si}{=} \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \quad (\overset{si}{\geq} / \overset{si}{\leq}).$$

□

V tomto texte sa zameriavame práve na procesy s lokálne konečnou indexovou množinou. Použijeme hlavne množinu $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ a v konečnom prípade $\{0,...,N\}$, kde $N\in\mathbb{N}$. Veta 7 nám vlastne zjednodušuje overovanie, či je proces $\mathcal{F}_t$-martingal. Stačí vždy overiť len susedné indexy.

Lema 8. *Nech proces $X=(X_t, t\in T)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub). Ak je filtrácia $(\mathcal{G}_t, t\in T)$ zovretá medzi $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, tak proces X je tiež $\mathcal{G}_t$ martingal (super/sub).*

Dôkaz. Z predpokladov plynie, že $X_t \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_t^X) \subset \mathbb{L}^1(\mathcal{G}_t)$. Buďte $s,t\in T$ také, že $s<T$. Potm z $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{G}_s$ a $X_s \in \mathbb{L}^1(\mathcal{G}_s)$ máme

$$\mathbf{E}[X_t|\mathcal{G}_s] \overset{si}{=} \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]|\mathcal{G}_s] \overset{si}{=} \mathbf{E}[X_s|\mathcal{G}_s] \overset{si}{=} X_s \quad (\overset{si}{\geq} / \overset{si}{\leq}).$$

□

Povieme, že proces $X=(X_t, t\in T)$ je **martingal (supermartingal, submartingal)**, ak je $\mathcal{F}_t^X$-martingal (super/sub). Ekvivalentne je proces martingal (super/sub), ak je martingal vzhľadom k nejakej filtrácii, pričom vždy môžme uvažovať kanonickú.

Príklad. Nech $X_n, n\in\mathbb{N}$ sú nezávislé rovnako rozdelené integrovateľné náhodné veličiny, také, že $\mathbf{E}[X_n]=0$ pre všetky $n\in\mathbb{N}$. Potom odpovedajúca náhodná prechadzka

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

je martingal. Skutočne, z nezávislosti X_{n+1} a S_n pre všetky $n\in N$ máme *si*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^S] &= S_n + \mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S]\\ &= S_n + \mathbf{E}[X_{n+1}]\\ &= S_n.\end{aligned}$$

Poznámka 9. Ak je $(\mathcal{F}_t, t\in T)$ filtrácia na $(\Omega,\mathcal{A})$ a $X\in\mathbb{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P)$, tak proces $X_t=\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_t]$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Veta 10. *Nech* $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *potom systém veličin*

$$\{\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]; \mathcal{F} \in \mathcal{A}\}$$

je rovnomerne integrovateľný.

Dôkaz. Viď príloha C.

Dôsledok Ak je $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrácia na $(\Omega, \mathcal{A})$, tak

$$X_t = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_t]$$

je rovnomerne integrovateľný $\mathcal{F}_t$-martingal.

Naviac pre $T = \mathbb{N}_0$ platí implikácia v dôsledku dokonca aj opačne. Teda ak máme rovnomerne integrovateľný martingal $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$, tak existuje $X \in \mathbb{L}^1$, taká, že $X_n = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n], n \in \mathbb{N}_0$ (viď [3], veta 4.8). Dokonca z toho plynie aj konvergencia $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ s.i. a aj v $\mathbb{L}^1$ (viď [3] veta 4.5). Ďalšie vety a tvrdenia týkajúce sa tejto problematiky môžeme nájsť v [3]. Na ilustráciu dôležitosti rovnomernej integrovateľnosti uvedieme jeden príklad, ktorý ukazuje neželané vlastnosti prípadov, kde rovnomerná integrovateľnosť chýba.

Príklad. Uvažujme náhodnú prechádzku

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde X_n sú nezávislé náhodné veličiny s rovnomerným rozdelením na množine $\{-1, 1\}$. Predstavme si opakujúcu sa spravodlivú hru 2 hráčov, kde v jednotlivej hre vždy jeden prehrá, čím stratí korunu a druhý vyhrá, čím získa korunu. Každý hráč má pravdepodobnosť výhry 1/2 (teda aj prehry). Vyberme si jedného z hráčov. Náhodná veličina S_n potom vyjadruje stav konta tohoto hráča v čase n. Z predošlého príkladu vieme, že S_n je martingal. Ukážeme si, že S_n, $n \in \mathbb{N}$ nie sú rovnomerne integrovateľné.

Pre spor predpokladajme, že S_n su rovnomerne integrovateľné. Potom vieme, že existuje taká nahodná veličina $S = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$, že S_n k nej konverguje s.i. a aj v $\mathbb{L}^1$. Z viet 13.4. a 14.20. v [1] plynie aj konvergencia charakteristických funkcii S_n k charakteristickej funkcii S. Navyše X_k sú nezávislé a rovnako rozdelené, a teda máme

$$\mathbf{E}\exp(itS) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp(itX_1)^n = \mathbf{E}\exp(itX_1)^\infty.$$

Vieme, že charakteristická funkcia je spojitá. Funkcia na pravej strane by však bola spojitá v 0 len vtedy, ak by X_1 bola identická 0, čo je spor. Uvažovaná náhodná prechadzka, teda naozaj nie je rovnomerne integrovateľná.

Označme

$$\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n = k\}, \quad M_n = \max_{k\leq n} S_k.$$

Chýbajúca vlastnosť rovnomernej integrovateľnosti S_n má za následok rôzne negatívne vlastnosti, ktoré sú v rozpore s tým, že hra je spravodlivá (to je spôsobené aj vyššie spomínanou neexistenciou náhodnej veličiny S_∞). Dokážeme si, že S_n

s pravdepodobnosťou 1 dosiahne ľubovoľne veľkú hodnotu $k \in \mathbb{N}$ v konečnom čase. To sa samozrejme neobíde bez predpokladu, že môžeme hrať ako dlho chceme a môžme si požičiavať koľko chceme. Matematické vyjadrenie dokazovaného tvdenia je

$$P(\tau_k < \infty) = 1 \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N}.$$

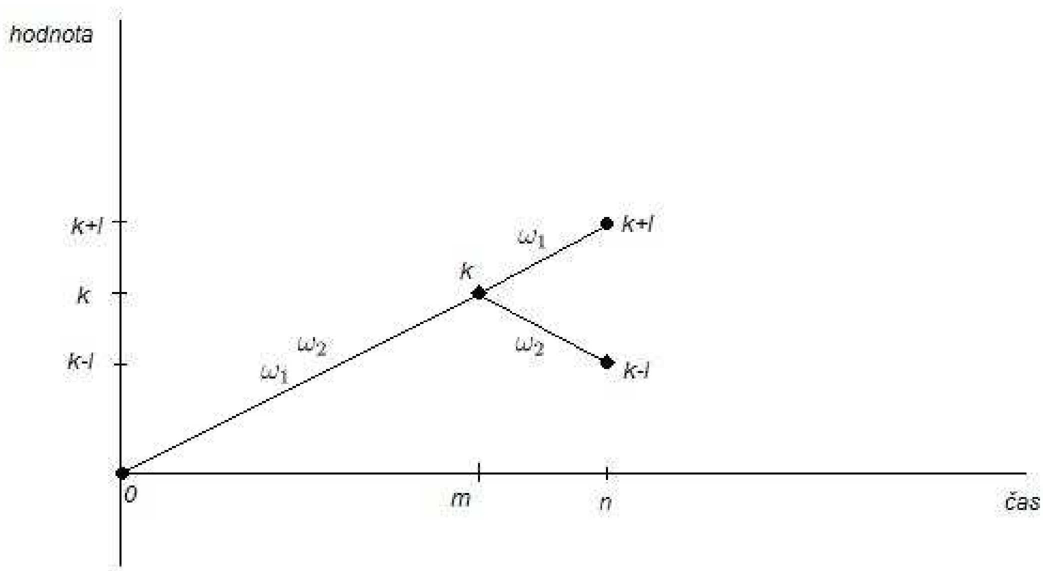
Najskor si dokážeme 3 pomocné tvrdenia:

1. Pre $k, l \in \mathbb{N}$ Platí $P(S_n = k + l) = P(M_n \geq k, S_n = k - l)$.

   Porovnáme si elementárne javy v javoch

   $$[S_n = k + l], \quad [M_n \geq k, S_n = k - l].$$

   Majme elementárny jav $\omega_1 \in [S_n = k + l]$ (nejaký konkrétny priebeh hry). V tejto hre mal nutne hráč v nejakom čase $m < n$ sumu k. Z času m sa potom dostal do času n na hodnotu $k+l$. Uvažujme jav $\omega_2 \in [M_n \geq k, S_n = k-l]$, taký že do času m prebiehal rovnako ako ω_1 a z m do n presne opačne (tam kde náš hráč vyhral v ω_1, v ω_2 prehral). Jav ω_2 teda musel skončiť na hodnote $k - l$. Navyše, zrejme $P(\omega_1) = P(\omega_2)$. Tento postup sa zvykne nazývať princíp zrkadlenia. Sitáciu ilustruje obrázok.



   Naopak, v každom jave $\omega_2 \in [M_n \geq k, S_n = k - l]$ je čas $m < n$ taký, že hráč má sumu k. K nemu uvažujeme jav $\omega_1 \in [S_n = k + l]$, ktorý sa do času m správa rovnako a potom presne opačne ako ω_2, a teda skončí na hodnote $k + l$. Znova je $P(\omega_1) = P(\omega_2)$, a teda javy $[S_n = k + l]$, $[M_n \geq k, S_n = k - l]$ sú tvorené jednoznačne odpovedajúcimi dvojicami elementárnych javov s rovnakými pravdepodobnasťami a to nám dáva, čo sme chceli.

   $\square$

2. Nech $n + k$ je nepárne, potom $P(M_n \geq k) = 2P(S_n \geq k)$.

Na úvod si uvedomme, že nepárnosť $n+k$ implikuje $P(S_n = k) = 0$, pretože v párnych časoch môže S_n nadobúdať len párne hodnoty a v nepárnych len nepárne. Z predošlého bodu máme

$$\begin{aligned} P(M_n \geq k, S_n < k) &= \sum_{l \in \mathbb{N}} P(M_n \geq k, S_n = k - l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}} P(S_n = k + l) = P(S_n > k). \end{aligned}$$

Navyše $[S_n > k] \subset [M_n \geq k]$, preto platí $P(M_n \geq k, S_n > k) = P(S_n > k)$, a teda

$$\begin{aligned} P(M_n \geq k) =& P(M_n \geq k, S_n > k) + P(M_n \geq k, S_n < k) \\ =& 2P(S_n > k) = 2P(S_n \geq k). \end{aligned}$$

□

3. Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí $P(S_n \geq k) \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$.

   Podľa centrálnej limitnej vety platí

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1) \quad \text{v distribúcii.}$$

   Označme $F_n(x) = P(S_n/\sqrt{n} < x)$ distribučné funfcie $S_n/\sqrt{n}$. Z vety v prílohe A máme rovnomernú konvergenciu $F_n \to \Phi$, kde Φ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia N(0,1). Potom dostávame:

$$P(S_n \geq k) = 1 - P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{n}}\right) = 1 - F_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

□

S týmito poznatkami sa už jednoducho dopracujeme k cieľu. Platí

$$[\tau_k < \infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_n \geq k] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_{2n} \geq k] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_{2n+1} \geq k],$$

pretože $[M_n \geq k]$ je neklesajúca postupnosť javov. Nakoniec dostávame pre k párne

$$\begin{aligned} P(\tau_k < \infty) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_{2n+1} \geq k]) = \lim_{n\to\infty} P(M_{2n+1} \geq k) = \\ = \lim_{n\to\infty} 2P(S_{2n+1} \geq k) = 1 \end{aligned}$$

a pre nepárne

$$P(\tau_k < \infty]) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_{2n} \geq k]) = \lim_{n\to\infty} P(M_{2n} \geq k) = \lim_{n\to\infty} 2P(S_{2n} \geq k) = 1.$$

Dokázali sme, že v tejto hre vie hráč v konečnom čase dospieť k akokoľvek vysokej výhre s pravdepodobnosťou 1. To je v podstate arbitráž (zisk bez rizika straty), ktorá je v teorii spravodlivého ocenovania neprípustná. Netreba však zabúdať, že výška majetku ktorý môžeme pred dosiahnutím požadovanej výhry stratiť nie je ničím ohraničená. Problém je navyše aj v tom, že rovnaké tvrdenie platí aj pre druhého hráča. K tomuto príkladu sa ešte na konci tejto kapitoly vrátime.

2.2 Predikovateľné procesy

Definícia. Nech $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrácia. Pre $t \in T$ označme $T_{t-} = \{s \in T; s < t\}$. Definujeme

$$\mathcal{F}_{t\uparrow} = \mathcal{F}_{-\infty}, \quad \text{ak } t = \min T$$

$$\mathcal{F}_{t\uparrow} = \sigma(\bigcup_{s \in T_{t-}} \mathcal{F}_s), \quad \text{ak } t > \inf T$$

Potom $(\mathcal{F}_{t\uparrow}, t \in T)$ nazveme **predikabilná filtrácia** k filtrácii $\mathcal{F}_t$ a proces $H_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ nazveme $\mathcal{F}_t$-predikovateľný.

Príklad: Nech $T = \mathbb{N}_0$, potom $\mathcal{F}_{0\uparrow} = \mathcal{F}_0$ a pre $n \in \mathbb{N}$ máme $\mathcal{F}_{n\uparrow} = \mathcal{F}_{n-1}$. Význam predikovateľného procesu H, je naznačený už v jeho názve. Je to proces, ktorého hodnotu vieme predpovedať už o krok dopredu, teda veličina H_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-merateľná. Príkladom predikovateľného procesu môže pre nás byť proces predstavujúci stratégiu nášho investovania do finančných derivátov. Buď $X_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ jednotková cena nejakého finančného derivátu v čase n a $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ nech je množstvo jednotiek derivátov, do ktorých investujeme na obdobie od času $n-1$ po n. Za tento čas sa cena derivátu zmení o $X_n - X_{n-1}$ a hodnota nášho portfolia sa zmení o hodnotu

$$H_n(X_n - X_{n-1}).$$

V čase m bude celková zmena V_m hodnoty nášho majetku rovná

$$V_m = \sum_{n=1}^{m} H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Hodnotu H_n poznáme už v čase $n-1$, kedy uzatvárame kontrakty. Tá potom určuje aj výšku nášho zisku/straty podľa zmeny hodnôt X_n v čase.

V praxi máme samozrejme väčšinou viacero investičných možností. Znovu ich jednotkové ceny v čase reprezentujeme náhodnými postupnosťami $X_n^1, ..., X_n^d$, $n \in \mathbb{N}_0$. Našu stratégiu bude tentoktát predstavovať d predikovateľných porocesov (postupností) $H_n^1, ..., H_n^d$, $n \in \mathbb{N}$, každý pre jednu investičnú možnosť. Rozdiel medzi hodnotou portfolia v čase $k \in \mathbb{N}$ a na začiatku bude vyjadrený analogicky ako v jednorozmernom prípade:

$$V_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{l=1}^{d} H_n^l (X_n^l - X_{n-1}^l) \right).$$

V súvislosti s predikovateľnými procesmi ako obchodovacími stratégiami spomenieme ako zaujímavosť ešte jedno tvrdenie nazvývané asymptotická optimalita log-optimálneho portfolia. Postupnosť vektorov

$$\{Y_n = (Y_n^1, ..., Y_n^d)^T, \, n \in \mathbb{N}\}, \, Y_n^i \geq 0 \, i = 1, ..., d$$

tu bude označovať výnosy z jednotlivých investičných možností na peňažnú jednotku. To znamená, že ak i-ta investícia ma v čase n hodnotu c, tak v čase $n+1$ bude mať hodnotu cX_{n+1}^i. Postupnosť

$$\{K_n = (K_n^1, ..., K_n^d)^T, \, n \in \mathbb{N}\}, \, \sum_{k=1}^{d} K_n^k = 1, \, K_n^i \geq 0 \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}, \, i = 1, ..., d$$

bude reprezentovať pomerné časti kapitálu, ktoré sme sa rozhodli investovať, t.j. z celkového kapitálu C_n v čase n investujeme do možnosti (derivátu) i na obdobie $(n, n+1]$ sumu $C_n K_{n+1}^i$. Medzi veličinami Y_n^i, K_n^i a X_n^i, H_n^i z predošlého odseku platia nasledujúce vzťahy:

$$X_n^i = Y_n^i X_{n-1}^i, \qquad H_n^i = C_{n-1} K_n^i, \qquad n \in \mathbb{N}, i = 1, ..., d.$$

Za obdobie $(n-1, n]$ je výnos investovanáho kapitálu rovný

$$K_n^T Y_n.$$

Pre zjednodušenie, nech investor v čase 0 začína s kapitálom $C_0 = 1$. Potom po n investičných obdobiach je jeho kapitál rovný

$$C_n = \prod_{k=1}^{n} K_k^T Y_k.$$

Označme K_n^* portfolio, s ktorým sa nadobúda maximum log-očakávanej hodnoty $\mathbf{E}[\log K_n^T Y_n]$ a C_n^* hodnotu odpovedajúceho kapitálu. Pred samotným tvrdením si ešte uvedieme jednu úvahu, ktorá nám lepšie vysvetlí význam nasledujúcej vety. Predpokladáme, že cieľom agresívneho racionálneho investora na trhu je maximalizovať rast hodnoty portfolia, teda maximalizovať

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log C_n.$$

Na trhu využíva ponúkané príležotosti. Môže sa však stať, že je schopný získať neobmedzené bohatstvo a to vtedy, ak je schopný skombinovať investičné možnosti tak, že odpovedajúci zisk bude skoro isto nezáporný a s kladnou pravdepodobnosťou bude kladný (arbitráž). V tomto prípade je úloha optimalizácie degenerovaná a zle podmienená, pretože nás núti zameriavať pozornosť na realizáciu arbitráže. Finančné príležitosi sú na trhu preto v podstate rozdelené na maximalizaciu asymptotického rastu portfolia a realizáciu arbitráže. Z tohto dôvodu sa pri modelovaní predpokladá neexistencia arbitráže. Rozpracovana teória okolo nasledujúcej vety, jej dôkaz a práve zavedené pojmy sa nachádzajú v [5].

Veta 11. *Nech náhodné vektory výnosov z investícii* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *sú definované na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Nech* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *je filtrácia taká, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sigma(Y_1, ..., Y_n) \subset \mathcal{F}_n$. *Nech*

$$C_n^* = \prod_{k=1}^{n} K_k^{*^T} Y_k \quad \textit{resp.} \quad C_n = \prod_{k=1}^{n} K_k^T Y_k$$

je celkový kapitál po n *investičných periódach odpovedajúci log-optimálnej stratégii* $\{H_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *resp. ľubovoľnej inej stratégii* $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Potom* $(C_n/C_n^*, n \in \mathbb{N}_0)$ *je nezáporný supermartingal, ktorý konverguje s.i. k nezápornej náhodnej veličine* Y *so strednou hodnotou* $\mathbf{E}[Y] \leq 1$. *Ďalej platí* $\mathbf{E}[C_n/C_n^*] \leq 1$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *a*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_n^*} \leq 0.$$

Dôkaz. Uvedieme len náznak dôkazu časti tvrdenia, niektoré kroky nebudú korektne zdôvodnené. Pre $\lambda \in (0,1)$ z optimality H_n^* platí

$$\mathbf{E}[\log(\lambda C_n + (1-\lambda)C_n^*)] \leq \mathbf{E}[\log C_n^*].$$

Z toho ďalej dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \mathbf{E}[\log(\lambda C_n + (1-\lambda)C_n^*) - \log C_n^*] \\ &= \mathbf{E}[\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \log(1 - \lambda + \lambda \frac{C_n}{C_n^*})] \\ &= \mathbf{E}[\frac{C_n}{C_n^*} + 1], \end{aligned}$$

kde posledná rovnosť plynie zo vzťahu

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\log(1 + (x-1)\lambda)}{\lambda} = x - 1.$$

Máme teda nerovnosť

$$\mathbf{E} \frac{C_n}{C_n^*} \leq 1.$$

Odtiaľ dostaneme pre každé $u \in (0,1)$

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{C_n^*} u^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] u^n \leq \frac{1}{1-u} < \infty.$$

Polomer konvergencie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{C_n^*} u^n$$

je teda skoro isto väčší alebo rovný 1. Zo vzorca pre výpočet polomeru konvergencie R máme

$$1 \geq \frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_n^*}} = \exp\{\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_n^*}\},$$

čo nám dáva požadované tvrdenie

$$0 \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_n^*}.$$

□

To, že podiel (C_n/C_n^*) je nezáporný supermartingal znamená, že v každom čase je očakávaná budúca hodnota tohto podielu menšia alebo rovná tej súčasnej. Inak povedané, pri zvolení optimálnej stratégie bude náš očakávaný výnos vždy aspoň tak veľký ako pri zvolení akejkoľvek inej stratégie. Druhá časť tvrdenia prenáša to, čo bolo práve spomenuté do nekonečného časového horizontu. Teda, že v limite bude logaritmus nášho výnosu najvyšší možný vtedy, keď zvolíme vyššie spomínanú optimálnu stratégiu. Matematicky zapísané

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log C_n \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log C_n^*.$$

V niektorých prípadoch je užitočné, keď vieme proces dopredu upraviť tak aby bol martingalom. Preto v je v podkapitole venovanej predikovateľným procesom vhodné spomenúť pojem komprenzátoru.

Definícia. Nech $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Proces $K_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ nazveme **kompenzátorom** procesu X_t, ak je proces $M_t = X_t - K_t$ martingal.

Ak za indexovú množinu T zoberieme množinu $\mathbb{N}_0$, tak ku každému procesu $X_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ vieme nájsť kompenzátor, dokonca vieme dosť presne aj ako vyzerá. O kompenzátoroch sa dá viac dočítať v [3].

2.3 Markovský čas

Definícia. Nech $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrácia a $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Náhodnú veličinu τ nazveme **markovským časom**, značíme $\tau \in$MČ$(\mathcal{F}_t)$, ak $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in T$ (ekvivalentne $1_{[\tau \leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$).

Definícia nám hovorí, že markovský čas je taká náhodná veličina, že v každom čase $t \in T$ vieme rozhodnúť, či nastal jav $[\tau \leq t]$ alebo nie. Zvykneme ním vyjadrovať časový okamih nastatia nejakej udalosti, napr. zdvojnásobenie majetku, odohratie desiatej hry (v kasíne) alebo prehratie istej sumy pri stávkovaní. V literatúre sa občas uvádza pod názvom stopping time. Názov je odvodený z toho, že τ sa riadi nejakým zastavovacím pravidlom, ktoré hovorí, že ak nastane istá situácia, máme skončiť napr. s hraním, či obchodovaním alebo so stratégiou uplatňovanou do tohoto času. Čas t, v ktorom táto situácia nastane je nadobudnutá hodnota náhodnej veličiny τ. Veličina τ môže určovať aj časy javov, podľa ktorých sa potom menia naše stratégie, napr. kvôli dosiahnutiu optimalnej hodnoty portfolia. Často používaným markovsým časom vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ je čas prvého výstupu procesu $(X_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ z nejakej borelovskej množiny B, t.j. $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}; X_n \notin B\}$. K dôkazu markovskosti si stačí uvedomiť, že

$$[\tau \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \notin B] \in \mathcal{F}_n.$$

Ďalšia lema nám hovorí, že pre spočítateľnú indexovú množinu T nám na overenie markovskosti času τ stačí skontrolovať merateľnosť množín $[\tau = t]$, $t \in T$.

Lema 12. *Ak je $\tau : \Omega \to S \cup \{\infty\}$, kde $S \subset T$ je spočítateľná, tak τ je markovský čas práve vtedy, keď $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$, $t \in S$.*

Dôkaz. Nech τ je markovský čas a $t \in S$. Zrejme

$$[\tau < t] = \bigcup_{s \in S, s < t} [\tau \leq s] \in \mathcal{F}_t,$$

zo spočítateľnosi S. Potom $[\tau = t] = [\tau \leq t] \setminus [\tau < t] \in \mathcal{F}_t$.

Naopak, nech $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$, pre všetky $t \in S$. Potom

$$[\tau \leq t] = \bigcup_{s \in S, s \leq t} [\tau = s] \in \mathcal{F}_t$$

□

Nasledujúca veta charakterizuje martingal pomocou markovských časov nadobúdajúcich 2 rôzne hodnoty.

Veta 13. *Nech $X = (X_t, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný integrovateľný proces. Potom nasledújúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

- *Pre všetky $\tau \in M\check{C}(\mathcal{F}_t)$ také, že $\tau : \Omega \to \{s, r\}$, kde $s, r, \in T$ platí*
$$\mathbf{E}[X_s] = \mathbf{E}[X_r] = \mathbf{E}[X_\tau]. \tag{2.2}$$
- *Proces X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal.*

Dôkaz. Nech platí (2.2). Buď $s, r \in T$, $s \le r$ a $A \in \mathcal{F}_s$. Potom $\tau = s 1_A + r 1_{\Omega \setminus A}$ je markovský čas, pretože $[\tau = s] = A \in \mathcal{F}_s$ a $[\tau = r] = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}_s$. A teda z (2.2) plynie

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}[X_r] - \mathbf{E}[X_\tau] = \mathbf{E}[X_r - X_\tau] \\ &= \mathbf{E}[(X_r - X_s)1_A] + \mathbf{E}[(X_r - X_r)1_{\Omega\setminus A}] \\ &= \mathbf{E}[(X_r - X_s)1_A], \end{aligned}$$

a X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Naopak, ak je X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal, tak pre ľubovoľný markovský čas $\tau : \Omega \to \{s, r\} \subset T$, $s < r$ máme $A = [\tau = s] \in \mathcal{F}_s$ a $\Omega \setminus A = [\tau = r] \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}[(X_r - X_s)1_A] \\ &= \mathbf{E}[(X_r - X_\tau)1_A] + \mathbf{E}[(X_r - X_\tau)1_{\Omega\setminus A}] \\ &= \mathbf{E}[X_r - X_\tau] = \mathbf{E}[X_r] - \mathbf{E}[X_\tau]. \end{aligned}$$

□

Poznámka 14. Ak je $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ a $r \in T$, potom $\tau \wedge r = \min\{\tau, r\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, pretože pre $t < r$ je
$$[\tau \wedge r \le t] = [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$$
a pre $t \ge r$ máme
$$[\tau \wedge r \le t] = \Omega \in \mathcal{F}_t.$$

Veta 15 (Optional stopping theorem)**.** *Nech $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub) a $\tau \in M\check{C}(\mathcal{F}_n)$. Potom $X_{\tau\wedge n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.*

Dôkaz Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\tau \wedge n \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$, a teda pre $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$ platí $[\tau \wedge n = k] \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ a

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{[\tau\wedge n = k]} \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_n).$$

Zrejme
$$X_{\tau\wedge n} - X_{\tau\wedge(n-1)} = (X_n - X_{n-1}) 1_{[\tau > n-1]},$$
kde $[\tau > n-1] = \Omega \setminus [\tau \le n-1] \in \mathcal{F}_{n-1}$. Potom platí

$$\mathbf{E}[X_{\tau\wedge n} - X_{\tau\wedge(n-1)} | \mathcal{F}_{n-1}] = 1_{[\tau > n-1]}\, \mathbf{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \overset{si}{=} 0 \quad (\overset{si}{\le}, \overset{si}{\ge}).$$

□

Dôsledok Nech $\text{MČ}(\mathcal{F}_n) \ni \tau \overset{si}{<} \infty$, $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je martingal a $(X_{n\wedge\tau}, n \in \mathbb{N}_0)$

sú rovnomerne integrovateľné. Potom $\mathbf{E}[X_\tau] = \mathbf{E}[X_0]$.

Dôkaz. Z konečnosti τ plynie $X_{n\wedge\tau} \stackrel{si}{\to} X_\tau$. Konvergencia s.i. implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti, ktorá je spolu s rovnomernou integrovateľnostou ekvivalentná s konvergenciou v $\mathbb{L}^1$ (veta 6.8. v [1]). Nakoniec podľa vety 15 je aj $X_{n\wedge\tau}$ martingal a s pomocou poznámky 3 dostávame

$$\mathbf{E}[X_\tau] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{n\wedge\tau}] = \mathbf{E}[X_0].$$

□

Vráťme sa ešte na chvíľu k príkladu s náhodnou prechádzkou. Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ položme

$$\tau = \inf\{n; S_n = k\}.$$

Vieme už, že $\tau \stackrel{si}{<} \infty$ a $\tau \in$MČ$(\mathcal{F}_n^S)$. Zrejme $\mathbf{E}[S_{n\wedge\tau}] = k \neq 0 = \mathbf{E}[S_0]$, a teda $S_{n\wedge\tau}$, $n \in \mathbb{N}$ nemôžu byť rovnomerne integrovateľné.

2.4 Absolútna konvergencia v $\mathbb{L}^1$

Pred koncom tejto kapitoly zavedieme ešte pojem absolútnej konvergencie v $\mathbb{L}^1$, ktorý bude užitočný pri dokazovaní tvrdení v ďalšej kapitole.

Definícia. Nech $X_n \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $n \in \mathbb{N}$. Povieme, že postupnosť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v $\mathbb{L}^1$ absolútne, ak konverguje v $\mathbb{L}^1$ a navyše platí

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\,|X_{n+1} - X_n| < \infty.$$

Zrejme absolútna konvergencia v $\mathbb{L}^1$ implikuje konvergenciu v $\mathbb{L}^1$ a z každej postupnosti konvergentnej v $\mathbb{L}^1$ vieme vybrať podpostupnosť, ktorá konverguje absolútne.

Poznámka 16. Absolútna konvergencia v $\mathbb{L}^1$ implikuje konvergenciu skoro isto.

Dôkaz. Zo vzťahu

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_{n+1} - X_n|\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\,|X_{n+1} - X_n| < \infty,$$

ktorý plynie z Léviho vety o monotónnej konvergencii dostávame, že veličina $\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_{n+1} - X_n|$ musí byť skoro isto konečná. To znaméná, že postupnosť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je skoro isto cauchyovská, a teda $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje skoro iste.

□

V nasledujúcich častiach budeme na niektorých miestach potrebovať prechádzať od konvergencie v $\mathbb{L}^1$ ku skoro isto. Tento krok nám nebude robiť žiadny problém, keď budeme miesto obyčajnej konvergencie v $\mathbb{L}^1$ automaticky predpokladať absolútnu, čo môžme, pretože vždy vieme prejsť k absolútne konvergentnej podpostupnosti. Uvedieme si jeden príklad, ktorý ukazuje, že ak máme konvergenciu v $\mathbb{L}^1$ a aj skoro isto, nezaručuje nám to absolútnu konvergenciu.

Proces $W = (W_t, t \geq 0)$ sa nazýva Wienerov, ak spĺňa tieto dve vlastnosti

1. $W_0 = 0$ a jeho trajektórie $W(\omega) = (W_t(\omega), t \geq 0)$ sú spojité,

2. Pre všetky $0 \leq s < t$ sú $\mathcal{F}_s^W$ a $\sigma(W_t - W_s)$ nezávislé a $(W_t - W_s) \sim N(0, t-s)$.

Z druhej vlastnosti je hneď vidno, že Wienerov proces je martingal. Nech n_0 je také prirodzené číslo, že platí $\sum_{k=n_0}^{\infty} 1/n^2 < 1$. Pre $n \in M = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$ položme

$$t_n = 1 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Potom $(X_n = W_{t_n}, n \in M)$ je martingal. Predpokladajme navyše, že X_n, $n \in M$ sú rovnomerne integrovatľné. Ako už bolo pod vetou 10 spomínané, plynie z toho, že X_n konverguje v $\mathbb{L}^1$ aj skoro isto. Veličina $(1/\sqrt{t_{n+1} - t_n})(X_{n+1} - X_n)$ má rozdelenie $N(0,1)$, a teda

$$\mathbf{E}\,|X_{n+1} - X_n| = \sqrt{t_{n+1} - t_n}\,\mathbf{E}\left[\frac{|X_{n+1} - X_n|}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}}\right] = \sqrt{t_{n+1} - t_n}\,\mathbf{E}\,|Y| = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\,|Y|,$$

kde $Y \sim$ N(0,1). Martingal X_n teda nekonverguje v $\mathbb{L}^1$ absolútne, pretože

$$\sum_{n \in M} 1/n = \infty.$$

Poznámka 17. Nech $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra a X_n konvergujú absolútne v $\mathbb{L}^1$ k X. Potom aj $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}]$ konverguju absolutne v $\mathbb{L}^1$ k $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$.

Dôkaz. Postupnosť $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}]$ konverguje v $\mathbb{L}^1$ k $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$, pretože z Jensenovej nerovnosti pre podmienené stredné hodnoty (viď [1]) plynie

$$0 \leq \mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}] - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]| = \mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}[X_n - X|\mathcal{F}]| \leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[|X_n - X||\mathcal{F}]] = \mathbf{E}\,|X_n - X|.$$

Absolútnu konvergenciu dostaneme automaticky, pretože platí

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}] - \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}]| &= \mathbf{E}\,|E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}]| \leq \\ &\leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[|X_{n+1} - X_n||\mathcal{F}]] = \mathbf{E}\,|X_{n+1} - X_n|.\end{aligned}$$

$\square$

Na záver si ešte ujasnime, že súčet absolútne konvergentných postupností je absolútne konvergentný. Plynie to veľmi jednoducho z trojuholníkovej nerovnosti.

3. Finančná interpretácia

Keď investor vsúpi na trh, chce samozrejme voliť svoju stratágiu tak, aby optimalizovala hodnotu jeho portfólia. O tejto stretégii hovorí aj veta 11. Ak by na trhu existovala možnosť arbitráže, tak by sa okamžiťe začala využívať a tým by zakrátko aj zanikla. Ak predpokladáme neexistenciu arbitráže existuje pre všetky strany s možnosťou zisku aj možnosť straty. V spravodlivo oceňovacom procese sa budeme snažiť nájsť nejakú oceňovaciu mieru, ktorá každému možnému budúcemu vývoju priradí nejakú váhu, ktorá bude rešpektovať princíp akejsi primeranosti a rovnováhy. To znamená, že možnosti s obrovkým ziskom by nemali byť veľmi pravdepodobné a preto by mali mať váhu menšiu, rovnako ako príliš stratové scenáre. Spravodlivo oceňovacia miera by teda mala byť taká, aby vyvažovala rôznosť možných scenárov v podobe zachovávania očakávanej hodnoty portfolia. Presne tento princíp, zachovávanie očakávanej hodnoty v čase, spĺňajú procesy, ktoré sú martingalmi. A preto sa za spravodlivo oceňovacie miery berú práve martingalové miery. Model spravodlivého oceňovania má samozrejme význam vtedy, keď mu odpovedá aj modelovaná situácia. Minimálna požidavka na to, aby sme vôbec mohli spravodlivo oceňovať je teda neexistencia arbitráže, čo presne odpovedá kladným pravdepodobnostiam realizovania zisku aj straty.

3.1 Interpretácia pojmov z Douglasovej vety

3.1.1 Jednorozmerný prípad

Majme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ sú integrovateľné náhodné veličiny, ktoré určujú cenu nejakého finančného derivátu (prípadne iného finančného inštrumentu alebo podkladového aktíva) v časoch 0 až do ∞ (rovnako by sme mohli použiť aj konečnú indexovú množinu $0, ..., N, N \in \mathbb{N}$, no prípad $T = \mathbb{N}_0$ je všeobecnejší a nie o veľa náročnejši). Označme pre $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k = 0, ..., n).$$

Poznamenajme, že $\mathcal{F}_0 = \sigma X_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, pretože X_0 je konštanta. Množinu $\mathcal{X}$ z Douglasovej vety definujeme takto:

$$\mathcal{X} := \{1_A(X_n - X_{n-1}); A \in \mathcal{F}_{n-1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Každý prvok $\mathcal{X}$ vyjadruje zmenu ceny finančného derivátu z času $n-1$ na čas n za predpokladu, že v čase $n-1$ nastal jav A. Pri takomto výbere prvkov množiny $\mathcal{X}$ je $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ množina martingalových mier vektoru $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$. Naozaj, ak máme $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, potom pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ platí $X_n \in L^1(Q)$ (integrovateľnosť) a pre všetky $A \in \mathcal{F}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ z platnosti $\mathbf{E}_Q[1_A(X_n - X_{n-1})] = 0$, $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\int_A X_n dQ = \int_A X_{n-1} dQ,$$

teda $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Priestor $\mathcal{X}^*$ je tvorený všetkými lineárnymi kombináciami náhodných veličín z $\{1 \cup \mathcal{X}\}$. To znamená, že $\mathcal{X}^*$ je tvorená náhodnými veličinami $Y \in L^1(Q)$, pre všetky $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare

$$Y = C + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(X_n - X_{n-1}), [Q]\text{-si} \tag{3.1}$$

kde C je konštanta, H_n lineárna kombinácia identifikátorov javov z $\mathcal{F}_{n-1}$ a H_n je nenulová funkcia len pre konečne mnoho $n \in \mathbb{N}$. Proces $(H_n, n \in \mathbb{N})$ je predikovateľný, pretože $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$. Predstavme si, investujeme do podkladového aktíva. Buď $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ ekvivalentná so skutočnou pravdepodobnosťou P a $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, Q)$ náhodná veličina určujúca hodnotu nášho portfolia, ku ktorej sa chceme čo najbližšie priblížiť. Vyjadrenie (3.1) nám potom dáva stratégiu, ako v jednotlivých časoch obchodovať, aby sme sa ku želanej hodnote približovali. Veličina H_n určuje počet jednotiek finančného derivátu, ktoré si máme v čase $n-1$ zaobstarať, podľa toho, aký jav danom čase nastal. Konštanta C reprezentuje spravodlivú cenu portfolia v čase 0, pretože X_n je martingal podľa Q, a teda očakávané hodnoty Y sa v čase nemenia a zostávajú na úrovni C.

Veta 18. *Nech $Q \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Potom*
(i) pre všetky $Y \in \mathcal{X}^*$ a $m \in \mathbb{N}$ existujú $C \in \mathbb{R}$ a $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ také, že platí

$$\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_m] = C + \sum_{n=1}^{m} H_n(X_n - X_{n-1}) \quad Q - s.i..$$

(ii) Pre všetky $Y \in \overline{\mathcal{X}^*}$ existujú $C \in \mathbb{R}$ a $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ také, že platí (3.1).

Dôkaz.
(i) Nech $Y \in \mathcal{L}^*$ a $m \in \mathbb{N}$. Vieme, že Y sa dá vjadriť v tvare (3.1), kde H_n je nenulové len pre konečne mnoho n. Existuje teda také $N \in \mathbb{N}$, že $H_n = 0$ pre všetky $n \geq N$. Potom s.i. máme

$$\begin{aligned}
E[Y|\mathcal{F}_m] =& \mathbf{E}\left[C + \sum_{n=1}^{N} H_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_m\right] \\
=& C + \sum_{n=1}^{m} H_n(X_n - X_{n-1}) + \mathbf{E}\left[\sum_{n=m+1}^{N} H_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_m\right] \\
=& C + \sum_{n=1}^{m} H_n(X_n - X_{n-1}) + \sum_{n=m+1}^{N} \mathbf{E}[H_n \underbrace{\mathbf{E}[(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]}_{0} |\mathcal{F}_m] \\
=& C + \sum_{n=1}^{m} H_n(X_n - X_{n-1}).
\end{aligned}$$

(ii) Majme $Y \in \overline{\mathcal{X}^*}$. Existuje postupnosť $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^*$ taká, že $Y_k \to Y$ v $\mathbb{L}^1(Q)$ absolútne. Pre všetky k sa Y_k dá vyjadriť v tvare (3.1):

$$Y_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} H_n^k(X_n - X_{n-1}), [Q]\text{-s.v.}$$

Máme $\mathcal{X}^* \subset \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, Q)$, a teda náhodná veličina Y je $\mathcal{F}_\infty$-merateľná, pretože aj $\overline{\mathcal{X}^*} \subset \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, Q)$. Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ z (i) máme $[Q]$-s.i.:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Y_k] &= C_k, \\ \mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_{n-1}] &= H_{n-1}^k(X_n - X_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podľa poznámky 3 z konvergencie Y_k v $\mathbb{L}^1(Q)$ dostávame $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{E}[Y_k] = \mathbf{E}[Y] =: C$. Podľa poznámok 16 a 17 z absolútnej konvergencie Y_k máme, že

$$\mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{si} \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$$

pre $n \in \mathbb{N}$ ľubovoľné, ale pevné. Keďže

$$\mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_{n-1}] \xrightarrow{si} \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_{n-1}],$$

musí existovať skoro isto aj $\lim\limits_{k\to\infty} H_n^k =: H_n$ na množine $[X_n - X_{n-1} \neq 0]$. Mimo $[X_n - X_{n-1} \neq 0]$ môžme H_n dodefinovať nulou. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ sme dostali:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_{n-1}] + H_n(X_n - X_{n-1}) = ... = \\ &= \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_0] + \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \\ &= C + \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}),\ \text{s.i..} \end{aligned}$$

Po limitnom prechode $n \to \infty$ máme čo sme chceli dokázať:

$$C + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(X_k - X_{k-1}) = \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_\infty] = Y,\ [Q]\text{-s.i..}$$

□

Douglasova veta spolu s vetou 18 nám vlastne hovoria, že ak z $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ vezmeme krajnú pravdepodobnostnú mieru Q, tak každá náhodná veličina v $\mathbb{L}^1(Q)$ sa dá vyjadriť v tvare (3.1). Čo znamená, že každý búdúci finančný tok (reprezentovaný náhodnou veličinou $Y \in \mathbb{L}^1 Q)$ je replikovateľný. Pri tom replikovateľnosť chápeme ako existenciu stratégie $H_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ takej, že platí (3.1).

3.1.2 Viacrozmerný prípad

Analogicky môžeme Douglasovu vetu využiť aj vo viacrozmernom prípade. Majme integrovateľné náhodné postupnosti $(X_n^1, ..., X_n^d; n \in \mathbb{N}_0)$, ktoré označujú hodnoty d rôznych finančných derivátov v časoch $0, 1, ...$ a teoreticky až do nekonečna. V čase n budeme vždy poznať aktuálne hodnoty $X_n^1, ..., X_n^d$ všetkých derivátov a tomu prispôsobíme aj zavedenie filtrácie. Označíme

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\bigcup_{k=0}^{n} \sigma(X_k^1, ..., X_k^d))$$

a množinu $\mathcal{X}$ zavedieme takto:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{d} \mathcal{X}_k,$$

kde

$$\mathcal{X}_k = \{1_A(X_n^k - X_{n-1}^k); A \in \mathcal{F}_{n-1}, n \in \mathbb{N}\} \quad k = 1, ..., d.$$

Podobne nám znovu každá funkcia $1_A(X_n^k - X_{n-1}^k)$ vyjadruje zmenu hodnoty k-teho finančného derivátu z času $n-1$ do n za podmienky, že v čase $n-1$ nastal jav A. Pri tejto definícii bude $\mathcal{P}_\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{d} \mathcal{P}_{\mathcal{X}_k}$, čo je množina pravdepodobnostných mier, pre ktoré všetky postupnosti $(X_n^k, n \in \mathbb{N}_0), k = 1, ..., d$ sú $\mathcal{F}_n$-martingaly. Analogicky ako v predošlom prípade, bude množina $\mathcal{X}^*$ tvorená náhodnými veličinami Y, ktoré sa pre všetky $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$ dajú vyjadriť v tvare

$$Y = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{d} H_n^k (X_n^k - X_{n-1}^k) \right), [Q] - s.v. \tag{3.2}$$

kde H_n^k sú lineárne kombinácie identifikátorov množín z $\mathcal{F}_{n-1}$ a sú nenulové len pre konečne mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Vyjadrenie (3.2) nám opať dáva návod, akú investičnú stratégiu zvoliť, aby sme sa teoreticky s časom idúcim do nekonečna blížili k nejakej požadovanej/očakávanej hodnote nášho portfólia (v tomto prípade nemusí byť nenulových H_n len konečne a uvažujeme $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$; $Q \sim P$). Túto stratégiu reprezentujú $\mathcal{F}_n$-predikovatľné náhodné postupnosti $(H_n^k, n \in \mathbb{N})$, $k = 1, ..., d$, kde k-ta postupnosť nám hovorí koľko jednotiek k-teho derivátu si máme v jednotlivých časoch zaobstarať (v čase $n-1$ nám to udáva hodnota H_n^k).

Vo viacrozmernom prípade platí podobná veta o uzávere $\mathcal{X}^*$ ako v prípade jednorozmernom.

Veta 19 (O replikácii-viacrozmerný prípad)**.** *Nech $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$. Potom pre všetky $Y \in \overline{\mathcal{X}^*}$ existujú C a $H_n = (H_n^1, ..., H_n^d) \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$, že platí* (3.2).

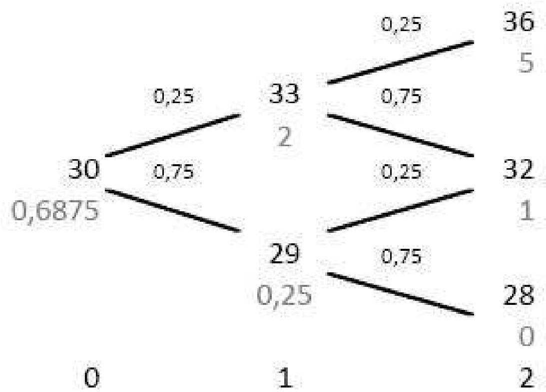
Dôkaz. Aby sme dokázali toto tvrdenie potrebujeme dlhšiu prípravu s zavedenie ďalších pojmov, preto je dôkaz uvedený v prílohe B.

Opať nám táto veta spolu s Douglasovou hovorí, že ak z množiny $\mathcal{P}_\mathcal{X}$ vyberieme krajnú pravdepodobnostnú mieru Q, tak sa každá veličina dá vyjadriť v tvare (3.2). Inak povedané, budúca hodnota ľubovoľného finančného toku $Y \in \mathbb{L}^1$ je replikovateľná pomocou hodnôt derivátov $X^1, ..., X^m$, teda že existuje stratágia (predikovateľný proces) $H_n = (H_n^1, ..., H_n^m)$, $n \in \mathbb{N}$ taká, že platí (3.2).

3.2 Oceňovanie finančných derivátov

V tejto podkapitole odpovieme na otázku ako určiť spravodlivú cenu budúceho finančného toku. V predošlých častiach sme sa zaoberali otázkou replikovateľnosti nejakej veličiny Y pomocou martingalových diferencií (viď (3.1) alebo (3.2)). Vo finančnej interpretácii Y predstavuje budúcu hodnotu našich investícii alebo hodnotu ľubovoľného iného očakávaného finančného toku. Ak sa nám túto náhodnú veličinu podarilo replikovať, potom systém veličín $(\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n], n \in \mathbb{N}_0)$ je taktiež martingal. To pre nás znamená, že v každom čase $n \in \mathbb{N}_0$ je hodnota veličiny $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ vyváženým a spravodlivým odhadom všetkých ďalších budúcich hodnôt procesu (postupnosti). Aj hodnota v čase 0 je takýmto odhadom a preto ju budeme považujať za spravodlivú cenu veličiny Y v čase 0.

Uveďme si jednoduchý príklad s konečným časom. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdopedobnostný priestor a na ňom majme náhodnú veličinu $X = (X_0, ..., X_N) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, ktorá bude predstavovať cenu nejakého podkladového akvíva v časoch $0, ..., N$. Predpokladajme ešte, že pre $n \in \{1, ..., N\}$ môže X_n nadobúdať len konečne mnoho hodnôt. Ďalej si predstavme, že chceme investovať do finančného derivátu viazaného na toto podkladové aktívum, ktorého cena je $\max(X_n - K, 0)$ v čase n (kde K je vopred dohodnutá cena, za ktorú sa odkúpi dohodnuté množstvo aktíva, cena derivátu je z pohľadu kupujúceho, t.j. pri $X_n \leq K$ je kontrakt bezcenný). V čase N bude hodnota kontraktu (derivátu) $Y = \max(X_N - K, 0)$ a my chceme v čase 0 stanoviť jeho spravodlivú cenu, t.j. verný odhad jeho ceny v čase N. Nájdeme martingalovú mieru procesu X ekvivalentnú so skutočnou pravdepodobnosťou P. Ak by taká neexistovala, na trhu by existovala možnosť arbitráže, ktorá je neprípustná (len samotná jej existencia by spôsobila okamžitý zánik tejto možnosti, pretože by bola na trhu hned využitá, preto predpokladáme neexistenciu arbitráže. Viď [7]). Už vieme, že ak z množiny martingalových mier vyberieme tú krajnú, veličina Y sa určite dá replikovať a spravodlivú cenu určíme ako $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_0]$. Urobme tento postup aj na konkrétnom príklade pre $N = 2$, $K = 31$ a možný vývoj X_n v čase je znázornený na obrázku.



Nad čiarami možného vývoja ceny v čase je vždy martingalová pravdepodobnosť s akou daný vývoj nastane. Martingalová miera v tomto prípade existuje práve jedna. Je teda zároveň aj krajným bodom množiny martingalových mier, z čoho nám plynie, že veličina $Y = \max(X_2 - 31, 0)$ je replikovatelná. Možné hodnoty Y su naznačené pod hodnotami X_2 šedou. Na stanovenie spravodlivej ceny Y v čase 0 nám teraz stačí podľa vypočítanej martingalovej miery prejsť postupne z času 2 k očakávaným hodnotám v čase 1 (tiež naznačené šedou) a nakoniec k očakávanej hodnote v čase 0. Zistili sme že spravodlivá cena takto uzavretého kontraktu je 0,6875.

V úplne všeobecnom prípade, kedy nechceme aby bol čas našich investičných činností ohraničený, predstavuje veličina Y teoreticky hodnotu nášho portfólia v nekonečnom čase, prípadne hodnotu, ku ktorej sa máme v čase približovať.

Túto hodnotu spravodivo oceníme rovnako ako v predošlom prípade. Najdeme krajnú martingalovú mieru ekvivalentnú so skutočnou pravdepodobnosťou. Podľa tejto miery potom môžeme stanoviť vyvážnú spravodlivú cenu Y ako $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_0]$. Tento odhad nazývame spravodlivým, pretože ako už bolo povedané $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ je martingal. Dokonca vieme, že martingal v takomto tvare je rovnomerne integrovateľný. Dôležitosť tejto vlastnosti, alebo skôr závažnosť jej absencie, je ilustrovaná v kapitole 2 na príklade náhodnej prechádzky. Spravodlivá cena navyše sĺňa aj zákon jednej ceny, ktorý hovorí, že príležitosti, ktoré dávajú rovnaké finančné toky, by mali mať rovnakú cenu (inak by existovala možnosť arbitráže). Užitočnosť Douglasovej vety je v tom, ze ak je Q krajná miera $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ ekvivalentná s P (skutočnou), tak máme zaručenú replikovateľnosť každej veličiny a navyše podľa Q môžu nastať práve tie javy, ktoré môžu nastať podľa P (majú kladnú pravdepodobnosť). Z tohto dôvodu je Q vhodná ocenovacia miera. Niekedy sa však môže stať, že žiadna krajná miera z $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ nie je ekvivalentná s P. Vtedy musíme byť pozornejší a vybrať takú mieru $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, ktorá je ekvivalentná s P a navyše aby veličina Y, ktorej spravodlivú cenu chceme stanoviť bola podľa Q replikovateľná. Existujú samozrejme aj veličiny, ktoré sa replikovať nedajú, no tieto potom nerešpektujú princíp spravodlivosti, t.j. rovnosti šancí všetkych strán na úspech. Spravodlivé ocenovanie pomocou martigalových mier má teda opodstatnenie, vtedy, ak je spravodlivá aj situácia, v ktorej chceme ceny stanovovať. Na záver ešte poznamenajme, že aj keď cieľová veličina Y nie je replikovateľná, máme možnosť replikovať veličinu, ktorá je k nej najbližšie v zmysle normy v $\mathbb{L}^1$. Teda, že Y rozdelíme na replikovateľnú zložku a na nereplikovateľnú zložku, ktorá má minimálnu $\mathbb{L}^1$-normu, akú vieme pri takomto rozlkade dosiahnuť. Tento rozklad sa dá urobiť za pomoci ortogonality v $\mathbb{L}^1$ zavedenej v prílohe 2, tak že získaná replikovateľná časť bude projekciou Y na priestor replikovateľných veličín.

Prílohy

Príloha A - veta o rovnomernej konvergencii k spojitej distribučnej funkcii

Veta 20. *Nech* $X_n \in \mathbb{L}(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $n \in \mathbb{N}$ *a* $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *sú také, že* $X_n \to X$ *v distribúcii. Ak je* $F_X(x) = P(X < x)$ *spojitá, tak*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_X(x) - F_{X_n}(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dôkaz. Z vlastností distribučných finkcii vieme, že

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0.$$

Buď $\varepsilon > 0$ ľubovoľné. Existuje $k \in \mathbb{N}$ a reálne čísla $x_1, ..., x_k$ také, že

$$(F_X(x_1) \le \varepsilon) \ \& \ (F_X(x_k) \ge 1 - \varepsilon) \ \& \ (|F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})| \le \varepsilon, \ \ j = 2, ..., k).$$

Vieme, že $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ v každom bode $x \in \mathbb{R}$, v ktorom je F_X spojitá. Zo spojitosti F_X potom máme bodovú konvergenciu $F_{X_n} \to F_X$. Existuje teda n_0 také, že

$$\forall n \ge n_0 \quad \forall j = 1, ..., k : |F_{X_n}(x_j) - F_X(x_j)| \le \varepsilon$$

Nech $j \in \{2, ..., k\}$ a $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Pre $n \ge n_0$ máme

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) - F_X(x) &\le F_{X_n}(x_j) - F_X(x_{j-1}) = \\
&= (F_{X_n}(x_j) + F_X(x_j)) - (F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})) \\
&\le 2\varepsilon, \\
F_{X_n}(x) - F_X(x) &\ge F_{X_n}(x_{j-1}) - F_X(x_j) = \\
&= (F_{X_n}(x_{j-1}) - F_X(x_{j-1})) + (F_X(x_{j-1}) - F_X(x_j)) \\
&\ge -2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pre $x < x_1$ máme

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \le F_{X_n}(x_1) \le \varepsilon,$$

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \ge -F_X(x) \ge -\varepsilon$$

a pre $x > x_k$ je

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \le 1 - F_X(x_k) \le \varepsilon,$$

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \ge F_{X_n}(x_k) - 1 = F_{X_n}(x_k) - F_X(x_k) + F_X(x_k) - 1 \ge -2\varepsilon.$$

A teda sme pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \ge n_0$ dostali $|F_{X_n}(x) - F_X(x)| \le 2\varepsilon$, čo nám po prechode k supremu cez všetky $x \in \mathbb{R}$ dáva, čo sme chceli dokátať.

□

Príloha B - Rozšírenie pojmu ortogonalita a dôkaz vety o replikácii

Ortogonalizácia v normovaných lineárnych priestoroch

Majme najskôr lineárny priestor so skalárnym súčinom $(X, (\cdot,\cdot))$, na ňom normu definovanú predpisom $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ a dva nenulové vektory $x, y \in X$. Povieme, že x, y sú ortogonálne, ak ich skalárny súčin (x, y) je rovný nule. Uvažujme funkciu $f_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom

$$f_{x,y}(\lambda) = \|x + \lambda y\|.$$

Vieme, že pre x, y platí rovnosť

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2. \tag{3.3}$$

Po zderivovaní (3.3) podľa λ dostávame, že $f_{x,y}$ nadobúda minimum v bode $-\frac{(x,y)}{\|y\|^2}$. Teda $f_{x,y}$ nadobúda minimum v bode 0 práve vtedy, keď $(x, y) = 0$. Inak povedané, vektory x, y sú na seba kolmé, práve vtedy keď

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

Rovnako definujeme aj ortogonalitu v normovanom lineárnom priestore.

Definícia. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárný priestor a $x, y \in X$ dva vektory. Povieme, že x, y sú ortogonálne (kolmé), ak

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\| \text{ pre všetky } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Značíme $x \perp y$.

V tomto prípade musíme mať napamäti, že ortogonalita v normovanom priestore nemusí byť symetrická. Analogicky budeme definovať aj ortogonalitu vektoru s viacerými vektormi.

Definícia. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný linárny priestor, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $y \in X^n$ nenulové. Povieme, že vektor x je kolmý na $y = (y_1, ..., y_n)^T$, ak

$$\|x\| \leq \|x + \lambda^T y\| \quad \text{pre všetky} \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Značíme $x \perp y$. Zrejme x je kolmý na y, práve vtedy, keď je kolmý na $\lambda^T y$ pre všetky $\lambda \in \mathbb{R}^n$, teda na všetky vektory v podriestore generovanom zložkami y. Rovnako teda budeme definovať aj kolmosť x na takýto podpriestor.

Majme lineárne nezávislé vektory $x_1, ..., x_n \in X$. V ortogonalizačnom procese je našim cieľom nájsť vektory $y_1, ..., y_n \in X$ také, že pre všetky $1 \leq k \leq n$ platí

$$\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i; \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k\} = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i; \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k\}$$

$$\&$$

$$y_k \perp (y_1, ..., y_{k-1}).$$

V prvom kroku položíme $y_1 = x_1$. Majme za sebou už k krokov. V kroku $k+1$ nájdeme $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$, v ktorom funkcia $\lambda \mapsto \|x_{k+1} + \lambda^T (y_1, ..., y_k)^T\|$ nadobúda minimum. Potom položíme

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \lambda_0^T (y_1, ..., y_k)^T$$

a máme

$$\begin{aligned}\|y_{k+1} + \lambda^T (y_1, ..., y_k)^T\| &= \|x_{k+1} + (\lambda + \lambda_0)^T (y_1, ..., y_k)^T\| \\ &\geq \|x_{k+1} + \lambda_0^T (y_1, ..., y_k)^T\| = \|y_{k+1}\|.\end{aligned}$$

Aby sme overili korektnosť tohto postupu, musíme sa presvedčiť, či sa hľadané minimum nadobúda. To rieši nasledujúca lema.

Lema 21. *Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normvaný lineárny priestor, $n \in \mathbb{N}$, $x, y_1, ..., y_n \in X$ a $y = (y_1, ..., y_n)^T$. Potom funkcia*

$$\lambda \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x + \lambda^T y\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$$

nadobúda minimum a množina, kde sa minimum nadobúda je konvexná a uzavretá.

Dôkaz. Ak sú vektory $y_1, ..., y_n$ lineárne závislé a priestor, ktorý generujú má dimenziu $m < n$, tak z nich môžme vybrať bázu tohto prietoru $y_{i_1}, ..., y_{i_m}$. Množiny $\{y_1, ..., y_n\}$, $\{y_{i_1}, ..., y_{i_m}\}$ generujú jeden a ten istý podpriestor a preto môžeme bez újmy na všeobecnosti predpokladať, že $y_1, ..., y_n$ sú lineárne nežávislé. Z definície infima, existuje postupnosť $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ taká, že

$$\|x + \lambda_k^T y\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{\|x + \lambda^T y\|; \lambda \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ak má postupnosť $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hromadný bod, vyberieme z nej konvergentnú podpostupnosť a jej limita je hľadaný bod minima. Ak $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nemá hromadný bod, tak nie je ohraničená, a teda

$$\|\lambda_k\|_e \to \infty, \quad k \to \infty,$$

kde $\|\lambda\|_e = \sqrt{\lambda^T \lambda}$ je euklidovská norma v $\mathbb{R}^k$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\|\lambda_k\|_e > 0$. Keby to tak nie je, len jednoducho začneme od takého $k_0 \in \mathbb{N}$, od ktorého to pre všetky nasledujúce členy platí. Všetky prvky postupnosti

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\|\lambda_k\|_e}$$

majú euklidovskú normu rovnú 1, a teda z nej môžeme vybrať konvergentnú podpostupnosť. Bez újmy na všeobecnosi teda môžme predpokladať, že $a_k \to a$, $k \to \infty$, kde $\|a\| = 1$. Potom $a_k^T y \to a^T y$, a teda

$$\|a_k^T y\| \to \|a^T y\| > 0, \quad k \to \infty,$$

pretože zložky vektoru y sú lineárne nezávislé. Z trojuholníkovej nerovnosti a z $\lambda_k = \|\lambda_k\| a_k$ potom dostávame

$$\|x + \lambda_k^T y\| \geq \|\lambda_k^T y\| - \|x\| = \|\lambda_k\|_e \|a_k^T y\| - \|x\| \to \infty, \quad k \to \infty,$$

čo je spor s definíciou λ_k. Označme A množinu všetkých argumentov minima. Uzavretosť A plynie z toho, že to je spojitý vzor hodnoty tohto minima. Nech $\lambda_1, \lambda_2 \in A$, $c \in (0,1)$ a označme hodnotu minima δ. Potom za použitia $x = cx + (1-c)x$ máme

$$\|x + (c\lambda_1 + (1-c)\lambda_2)^T y\| \leq |c|\|x + \lambda_1^T y\| + |1-c|\|x + \lambda_2^T y\| = \delta.$$

Z minimality δ plynie, že $\|x + (c\lambda_1 + (1-c)\lambda_2)^T y\| = \delta$ a $(c\lambda_1 + (1-c)\lambda_2) \in A$. Teda A je konvexná. □

Ortogonalizácia v $\mathbb{L}^1$ podľa pod-σ-algebry

Teraz ortogonalitu ešte viac zobecníme do takej podoby, v akej ju budeme používať aj v dôkaze. Najskôr si ale potrebujeme zovšeobecniť pojem podmienenej strednej hodnoty. Pojmy, ktoré v nasledujúcich riadkoch zavedieme, sa nachádzajú aj v [4], strana 338.

Definícia. Majme pravdepodobnostný prietor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebru a $(S, \mathcal{S})$ merateľný priestor. Zobrazenie

$$\mu : \mathcal{S} \times \Omega \to [0,1]$$

nazveme $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$-náhodná miera ak spĺňa

1. Pre všetky $D \in \mathcal{S}$ je $\mu(D, \cdot)$ $\mathcal{F}$-merateľná.
2. $\mu(S, \cdot) = 1$, s.i. a pre všetky $D \in \mathcal{S}$ je $\mu(D, \omega) \in [0,1]$ pre skoro všetky $\omega \in \Omega$.
3. Pre všetky $D_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvoch disjunktné je $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n, \cdot) \stackrel{si}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n, \cdot)$.

Definícia. Buďte μ, ν dve $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$- náhodné miery. Povieme, že μ je regulárnou verziou ν, ak pre všetky $D \in \mathcal{S}$ sa $\mu(D, \cdot) = \nu(D, \cdot)$ s.i. a pre všetky $\omega \in \Omega$ je $\mu(\cdot, \omega)$ pravdepodobnostná miera na $(S, \mathcal{S})$.

Veta 22. *Nech (S, ρ) je separabilný úplný metrický priestor, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra a $\mathcal{B}(S)$ borelovská σ-algebra na S. Potom ku každej $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{F}$-náhodnej miere existuje regulárna verzia.*

Dôkaz. Viď [4].

Definícia. Buď $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$, kde $\mathcal{S}$ je borelovská σ-algebra na S, (S, ρ) úplný separabilný metrický priestor a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Nech $\mu(D, \omega)$ je $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$-náhodná miera a nech $P_{X|\mathcal{F}}(D, \omega)$ je jej regulárna verzia. Potom $P_{X|\mathcal{F}}$ nazveme podmieneným rozdelením X vhľadom k $\mathcal{F}$. Ďalej definujeme zovšeobecnenú strednú hodnotu veličiny X vzhľadom k $\mathcal{F}$ predpisom

$$\bar{\mathbf{E}}[X|\mathcal{F}](\omega) = \int x \, dP_{X|\mathcal{F}}(x, \omega).$$

Nasledujúca veta hovorí, že naša definícia je skutočne zovšeobecnením klasickej podmienenej strednej hodnoty definovanej v [1], teda, že tento prípad zahŕňa.

Veta 23. *Majme $P_{X|\mathcal{F}}$ podmienené rozdelenie veličiny X vzhľadom k $\mathcal{F}$ ako v predošlej definícii. Nech $f : S \to \mathbb{R}$ je borelovsky merateľná a $f(X) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom*

$$\int f(x)\, dP_{X|\mathcal{F}}(x,\omega) = \mathbf{E}[f(X)|\mathcal{F}](\omega) \quad s.i..$$

Dôkaz. Viď [4].

Na tomto mieste je ešte vhodné poznamenať, že rovnaká veta platí aj pre zovšeobecnenú podmienenú strednú hodnotu (nepotrebujeme tam integrovateľnosť $f(X)$), pričom rovnosť nastáva vtedy, ak je ľavá strana strana dobre definovaná. Množina, kde je pravá strana dobre definovaná, je $\mathcal{F}$-merateľná a tvrdenie pre nezáporné merateľné $f(X)$ dostaneme pomocou Léviho vety o monotónnej konvergencii a predošlej vety. Zvyšok je už potom jednoduchý pomocou rozkladu na zápornu a kladnú časť.

Teraz máme už všetko pripravené, aby sme mohli zaviesť pojem ortogonality, ktorý budeme potrebovať.

Definícia. Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravdepodobnostný priestor, $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})^n$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Zaveďme označenie

$$\|X\|_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{E}}[|X||\mathcal{F}].$$

Povieme, že X je kolmý na Y v $\mathbb{L}^1(\mathcal{A})$ vzhľadom k $\mathcal{F}$, značíme $X \perp_{\mathcal{F}} Y$, ak platí

$$\|X\|_{\mathcal{F}} \overset{si}{\leq} \|X + H^T Y\|_{\mathcal{F}} \text{ pre všetky } H \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^n.$$

Ortogonalizačný proces bude prebiehať rovnako ako v predošlom prípade. Majme $X_1, ..., X_n \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$. Položíme $Y_1 = X_1$. V kroku $k+1$ už máme $Y_1, ..., Y_k$ také, že $Y_l \perp_{\mathcal{F}} (Y_1, ..., Y_{l-1})$, $l = 1, ..., k$. Nájdeme také $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^k$, že

$$\|X + H^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}} \overset{si}{\leq} \|X + K^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}}$$

pre všetky $K \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^k$ a položíme

$$Y_{k+1} = X + H^T(Y_1, ..., Y_k)^T.$$

Potom skoro isto platí

$$\begin{aligned}\|Y_{k+1} + K^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}} =& \|X_{k+1} + (H+K)^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}} \\ \geq& \|X + H^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}} \\ =& \|Y_{k+1}\|_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

Aby sme overili korektnosť tohto postupu, musíme sa presvedčiť, že to H s.i. minimalizujúce $\|X + K^T(Y_1, ..., Y_k)^T\|_{\mathcal{F}}$ vieme nájsť a že $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})^n$. O tom hovorí tvrdenie za nasledujúcou poznámkou.

Poznámka 24. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Potom pre ľubovoľné pevné $\omega \in \Omega$ máme

$$\|X\|_{\mathcal{F}}(\omega) = \|X\|_{\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P_{X|\mathcal{F}}(\cdot,\omega))}.$$

Teda $\|X\|_{\mathcal{F}}(\omega)$ je $\mathbb{L}^1$- norma podľa pravdepodobnosti $P_{X|\mathcal{F}}(\cdot, \omega)$.

Veta 25. *Buďte $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$, $Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})^n$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Položme pre $\omega \in \Omega$*

$$H(\omega) = \arg\min_{\|\|_e} \arg\min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \int |x + \lambda^T y| dP_{(X,Y^T)^T|\mathcal{F}}((x, y^T)^T, \omega). \tag{3.4}$$

Potom $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^n$ a platí

$$\|X + H^T Y\|_{\mathcal{F}} \overset{si}{\leq} \|X + K^T Y\|_{\mathcal{F}} \text{ pre všetky } K \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^n.$$

Navyše $X + H^T Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$.

Dôkaz. Výraz (3.4) znamená, že $H(\omega)$, pre ľubovoľné, ale pevné $\omega \in \Omega$, je argument minima euklidovskej normy, kde minimalizujeme na množine

$$\arg\min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \int |x + \lambda^T y|\, dP_{(X,Y^T)^T|\mathcal{F}}((x, y^T)^T, \omega),$$

čo je množina všetkých $\lambda \in \mathbb{R}^n$, v ktorých výraz

$$\int |x + \lambda^T y| d\, P_{(X,Y^T)^T|\mathcal{F}}((x, y^T)^T, \omega) = \mathbf{E}[|X + \lambda^T Y||\mathcal{F}](\omega) = \|X + \lambda^T Y\|_{\mathcal{F}}(\omega)$$

nadobúda minimum. Tento výraz svoje minimum naozaj nadobúda pre skoro všetky ω podľa vety 21, pretože podľa poznámky pred vetou je $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}(\omega)$ $\mathbb{L}^1$-norma. Podľa vety 21 máme navyše, že $\arg\min_\lambda \|X + \lambda^T Y\|_{\mathcal{F}}(\omega)$ je pre skoro všetky ω konvexná a uzatvorená množina. Preto na nej existuje práve jeden bod, kde euklidovská norma nadobúda minimum. Pre skoro všetky $\omega \in \Omega$ máme jednoznčane určené $H(\omega)$, pustime sa teda do dôkazu merateľnosti. Zrejme pre každé $\lambda \in \mathbb{R}^n$ platí

$$I_\lambda = \int |x + \lambda^T y| dP_{(X,Y^T)^T|\mathcal{F}}((x, y^T)^T), \cdot) \in \mathbb{L}(\mathcal{F}),$$

a teda aj

$$I = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} I_\lambda = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^n} I_\lambda = \inf_{\lambda \in \mathbb{Q}^n} I_\lambda \in \mathbb{L}(\mathcal{F}).$$

Pre $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ zaveďme označenie

$$U(\lambda_0, \varepsilon, \delta) = \{\omega \in \Omega;\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda - \lambda_0\|_e < \varepsilon,\ I(\omega) + \delta > I_\lambda(\omega)\},$$

čo je množina všetkých situácii, pri ktorých na otvorenom ε-okolí λ_0 dokážeme optimum realizovať s toleranciou δ. Keďže pre skoro všetky $\omega \in \Omega$ je $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}(\omega)$ norma na $\mathbb{L}^1(\mathcal{A})$, čo je spojité zobrazenie, tak aj $I_\lambda(\omega)$ je v premennej λ spojité pre skoro všetky ω. Navyše $\mathbb{Q}^n$ je hustá v $\mathbb{R}^n$, a teda platí

$$\begin{aligned} U(\lambda_0, \varepsilon, \delta) =& \{\omega \in \Omega;\ \exists \lambda \in \mathbb{Q}^n\ \|\lambda - \lambda_0\|_e < \varepsilon,\ I(\omega) + \delta > I_\lambda(\omega)\} \\ =& \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{Q}^n \\ \|\lambda - \lambda_0\| < \varepsilon}} [I + \delta > I_\lambda] \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Ďalej množinu, v ktorej sú situácie, kde už žiadne tolerancie nepovolujeme označme

$$U(\lambda_0, \epsilon) = \{\omega \in \Omega;\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda - \lambda_0\|_e < \epsilon,\ I(\omega) = I_\lambda(\omega)\}.$$

Pre túto množinu platí

$$U(\lambda_0, \epsilon) = \bigcap_{k=1}^{\infty} U(\lambda_0, \epsilon, \frac{1}{k}) \in \mathcal{F}$$

a tak máme

$$\|H(\omega)\|_e = \min_{\|\|_e} \arg\min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} I_\lambda(\omega) = \inf\{h \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty); \omega \in U(0, h)\} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}).$$

Pretože pre $\lambda \in \mathbb{R}^n$ a $\epsilon > 0$ platí

$$\|H(\omega) - \lambda\|_e < \epsilon \equiv \forall\, h > \|H(\omega)\| : \omega \in U(0, h) \cap U(\lambda, \epsilon),$$

máme rovnosť

$$\{\omega \in \Omega; \|H(\omega) - \lambda\|_e < \epsilon\} = \bigcap_{h \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)} [\|H\| \geq h] \cup U(0, h) \cap U(\lambda, \epsilon) \in \mathcal{F}.$$

A teda akýkoľvek vzor otvoreného okolia v $\mathbb{R}^n$ je $\mathcal{F}$-merateľný, z čoho plynie $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^n$, pretože borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ je generovaná práve otvorenými okoliami. Integrovateľnosť $X + H^T Y$ máme z platnosti

$$\|X + H^T Y\|_{\mathcal{F}} \overset{si}{\leq} \|X + K^T Y\|_{\mathcal{F}}$$

pre $K = 0$.

□

Na záver podkapitoly bude ešte užitočné spomenúť, že tam, kde sa $\|X\|_{\mathcal{F}}$ rovná nule sa s.i. aj X rovná 0. Označme teda $D = \{\omega \in \Omega; \|X\|_{\mathcal{F}} = 0\}$. Potom tvdrenie plynie z

$$0 = \int_D \|X\|_{\mathcal{F}}\, dP = \int_D |X|\, dP.$$

Dôkaz vety o replikácii pre viacrozmerný prípad

Lema 26. *Nech $Y \in \mathcal{X}^*$, $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ a $p \in \mathbb{N}$. Potom existujú $C \in \mathbb{R}$ a $H_n = (H_n^1, ..., H_n^k) \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{n\uparrow})$ také, že*

$$\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_p] = C + \sum_{n=1}^{p} (H_n)^T (X_n - X_{n-1}) \quad s.i.$$

Dôkaz Podobne ako v jednorozmernom prípade sa Y dá vyjadriť v tvare (3.2) a existuje $N \in \mathbb{N}$, že pre $n \geq N$ je H_n=0. Skoro isto teda platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_p] =& \mathbf{E}[C + \sum_{n=1}^{N}(H_n)^T(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_p] \\
=& C + \sum_{n=1}^{p}(H_n)^T(X_n - X_{n-1}) + \sum_{n=p+1}^{N} \mathbf{E}[(H_n)^T(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_p] \\
=& C + \sum_{n=1}^{p}(H_n)^T(X_n - X_{n-1}) + \\
&+ \sum_{n=p+1}^{N} \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{d} H_n^k \mathbf{E}[(X_n^k - X_{n-1}^k)|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_n\right] \\
=& C + \sum_{n=1}^{p}(H_n^m)^T(X_n - X_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Pristúpme teda k samotnému dôkazu.

Dôkaz vety 19. Majme $Y \in \overline{\mathcal{X}^*}$ a postupnosť $\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{X}^*$ konvergujúcu k Y v $\mathbb{L}^1$ absolútne. Zvoľme $n \in \mathbb{N}$. Podľa lemy 26 pre všetky $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_{n-1}] \stackrel{si}{=} (H_n^m)^T(X_n - X_{n-1}). \tag{3.5}$$

Výraz na ľavej strane konverguje absolútne v $\mathbb{L}^1$, a teda má aj limitu s.i. Preto má limitu s.i. aj výraz naľavo (ako v jednorozmernom prípade). Pre zjednorušenie označme

$$\begin{aligned}
&W_m = \mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_{n-1}] \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_n), \\
&W = \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_{n-1}] \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_n), \\
&Z = (Z^1, ..., Z^d)^T = X_n - X_{n-1} \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_n)^d, \\
&K_m = (K_m^1, ..., K_m^d)^T = H_n^m, \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F}_{n-1})^d \\
&\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Podľa nového označenia máme situáciu

$$(K_m)^T Z \stackrel{si}{=} W_m \xrightarrow{\mathbb{L}^1, si} W, \quad m \to \infty.$$

Chceme dokázať, že existujú veličiny $K = (K^1, ..., K^d)^T \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^d$ také, že

$$W \stackrel{si}{=} K^T Z.$$

K tomu nám pomôže vyššie zavedený ortogonalizačný proces. Od veličín $Z = (Z^1, ..., Z^d)^T$ prejdeme podľa predošlej podkapitoly k veličinám $A = (A^1, ..., A^d)$, ktoré sú ortogonálne vzhľadom k $\mathcal{F}$. Vieme, že

$$Z^i = \sum_{j=1}^{i} L_i^j A^j \quad i = 1, ..., d$$

pre vhodné $L_i^j \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$, a teda

$$W_m = (M_m)^T A$$

pre $M_m^i = K_m^i(L_i^i + L_{i+1}^i + ... + L_d^i) \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$. Z absolútnej konvergencie máme $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[|W_{m+1} - W_m|] < \infty$. Vyberme si ľubovoľné $j \in \{1, ..., d\}$. Z ortogonality a podľa konvencie "0.čokoľvek = 0" v kroku * potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\infty > \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[|W_{m+1} - W_m|] &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[|(M_{m+1} - M_m)^T A|] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{E}[|(M_{m+1}^1 - M_m^1)A^1 + ... + (M_{m+1}^d - M_m^1)A^d||\mathcal{F}]] \\
&\overset{*}{\geq} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[|M_{m+1}^j - M_m^j|\, \mathbf{E}[|(A^j + \sum_{\substack{i\in\{1,...,d\}\\ i\neq j}} \frac{M_{m+1}^i - M_m^i}{M_{m+1}^j - M_m^j} A^i||\mathcal{F}]] \\
&\overset{\perp}{\geq} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}[|M_{m+1}^j - M_m^j|\, \mathbf{E}[|A^j||\mathcal{F}]].
\end{aligned}$$

Z posledného výrazu máme, že $M_m^j\, \mathbf{E}[|A^j||\mathcal{F}]$ konverguje skoro isto . Na množine, kde je $\mathbf{E}[|A^j||\mathcal{F}]$ nenulové, čo je presne tam, kde je A^j nenulové, konverguje s.i. aj M_m^j. Na tejto množine potom definujeme

$$M^j = \lim_{m\to\infty} M_m^j.$$

Tam, kde je A^j nulové na hodnote M_m^j nezáleží a tak ju môžeme dodefinovať nulou. Teraz, keď máme vyjadrenie $W = M^T A$ a vieme, že

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 \\
A^i &= Z^i + \sum_{j=1}^{i-1} N_i^j A^j \qquad i = 2, ..., d,
\end{aligned}$$

kde $N_i = (N_i^1, ..., N_i^{i-1})^T \in \mathbb{L}(\mathcal{F})^{i-1}$ predstavujú H z vety 25, môžeme prejsť k hľadanému vyjadrenu W pomocou Z:

$$W = H^T Z, \quad H \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F})^d.$$

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ sme teda našli $H_n \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F})^d$, že platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n] &\overset{si}{=} \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_{n-1}] + (H_n)^T(X_n - X_{n-1}) = ... \\
&= C + \sum_{k=1}^{n} (H_k)^T(X_k - X_{k-1}).
\end{aligned}$$

Veličina Y je $\mathcal{F}_\infty$-merateľná, pretože je limitou Y_m v $\mathbb{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$. Limitným prechodom pre $n \to \infty$ dostávame

$$Y = E[Y|\mathcal{F}_\infty] \overset{si}{=} C + \sum_{k=1}^{\infty} (H_k)^T(X_k - X_{k-1}).$$

□

Príloha C - Dôkaz vety 10

Chceme dokázať, že

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{\mathcal{F}\in\mathcal{A}}\{\mathbf{E}[|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|1_{[|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|\geq c]}]\} = 0.$$

Z Jensenovej nerovnosti pre podmienené stredné hodnoty platí pre všetky $Y \in \mathbb{L}^1$ a $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ nerovnosť $|\,\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}]| \leq \mathbf{E}[|Y||\mathcal{F}]$. Potom pre $c > 0$ máme

$$\mathbf{E}[|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|1_{|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|\geq c}] \leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]1_{\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]\geq c}] = \mathbf{E}[|X|1_{[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]\geq c]}],$$

kde posledné = plynie jednoducho z definície podmienenej strednej hodnoty (integrácia $\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]$ cez $\mathcal{F}$-merateľnú množinu). Ďalej pre množinu $[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}] \geq c]$ platí

$$P[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}] \geq c] = \mathbf{E}[1_{[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]\geq c]}] = \mathbf{E}[1_{\left[\frac{\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}}{c}\geq 1\right]}] \leq \frac{1}{c}\,\mathbf{E}[\mathbf{E}[|X||\mathcal{F}]] = \frac{1}{c}\,\mathbf{E}[|X|].$$

Z toho potom pre všetky $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ dostávame nerovnosť

$$\mathbf{E}[|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|1_{|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|\geq c}] \leq \sup\{\mathbf{E}[|X|1_A]; A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \frac{1}{c}\,\mathbf{E}[|X|]\}.$$

Nerovnosť sa zachová, keď prejdeme na ľavej strane k supremu cez všetky $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Máme teda

$$\sup\{\mathbf{E}[|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|1_{|\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]|\geq c}; \mathcal{F} \subset \mathcal{A}\} \leq \sup\{\mathbf{E}[|X|1_A]; A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \frac{1}{c}\,\mathbf{E}[|X|]\}.$$

Keď dokážeme, že výraz na pravej strane nerovnosti ide k nule pre $c \to \infty$, sme hotoví. Sama veličina X je rovnomerne integrovateľná. To plynie z toho, že

$$\lim_{c\to\infty}|X|(1 - 1_{[|X|\geq c]}) = |X| \quad \& \quad |X|(1 - 1_{[|X|\geq c]}) \leq |X|.$$

Môžme teda použiť Lebesgueovu vetu (majoranta $|X|$) a dostávame

$$\lim_{c\to\infty}\mathbf{E}[|X|(1 - 1_{[|x|\geq c]})] = E[|X|] \Rightarrow \lim_{c\to\infty}\mathbf{E}[|X|1_{[|X|\geq]c}] = 0.$$

Podľa vety 5.16. v [1] má teda X absolútne spojité integrály, čo znamená, že

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists d > 0\,\forall\delta \leq d : \sup\{E[|X|1_A]; A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \delta\} \leq \varepsilon.$$

Voľme $\varepsilon > 0$. K nemu nájdeme d z predošlej definície abolútne spojitých integrálov. K tomuto d nájdeme také c_0, že pre všetky $c \geq c_0$ je

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{E}[|X|] \leq d.$$

Potom pre všetky $c \geq c_0$ je

$$\sup\{E[|X|1_A]; A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \frac{1}{c}\,\mathbf{E}[|X|]\} \leq \varepsilon,$$

čo nám dáva požadované tvrdenie.

$\square$

Zoznam použitej literatúry

[1] Lachout, P. : *Teorie pravděpodobnosti.* Karolinum, Praha, 1998. ISBN 80-7184-730-5.

[2] Lukeš, J. : *Zápisky z funkcionální analýzy.* Karolinum, Praha, 1998. ISBN 80-7184-597-3.

[3] Lachout, P. : *Diskrétní martingaly.* [online]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/tp2/071023-Diskretni_Martingaly.pdf [cit. 2011-05-16]

[4] Štěpán, J. : *Teorie pravděpodobnosti. Matematické základy.* Academia, Praha, 1987.

[5] Algoet, Paul H. Cover, Thomas M. : *Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment* [online]. Dostupné z: http://www.stanford.edu/~cover/papers/paper82.pdf [cit. 2011-05-16]

[6] Kalužíková, M. : *Martingaly.* Praha: Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikálna fakulta. Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, 2010. Vedúci diplomovej práce Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

[7] Haugh, M. : *Martingale pricing theory* [online]. 2005, Dostupné z: http://www.columbia.edu/~mh2078/FE04/mtgale_pricing.pdf [cit. 2011-05-16]

[8] Revuz, D. Yor, M. : *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, 3rd ed., 1999.